

Università degli studi di Catania

Corso di laurea in fisica

Esame di Laboratorio di Fisica I

Tesina sulla prova pratica di laboratorio

realizzata il 10/01/2003

da

Enrica Trovato

matricola n. 665/000043

Esperienza: Pendolo semplice per grandi oscillazioni

Introduzione teorica e descrittiva

Descrizione dell'apparato

L'apparato sperimentale utilizzato è costituito da una sfera di ottone, di massa nota (ma ininfluenza), la quale è appesa, tramite un anellino, ad un filo di nylon quasi inestensibile e di massa trascurabile. Il filo è poi fissato in alto ad un supporto metallico mobile al quale è annesso un goniometro e per mezzo del quale è possibile variare la lunghezza del filo: il goniometro serve a leggere l'angolo con il quale facciamo oscillare il pendolo. Tutto il sistema è poi fissato a terra da una colonna metallica e da una base fornita di appositi regolatori che consentono di mantenere il sistema perfettamente ortogonale al piano d'appoggio.

Scopo dell'esperienza

Lo scopo dell'esperienza è quello di ottenere una misura quanto più precisa possibile dell'accelerazione di gravità tramite la misura del periodo di un pendolo per grandi oscillazioni.

Descrizione teorica dell'esperienza

Lasciato a riposo il sistema rimane in equilibrio statico stabile in posizione verticale con la massa ferma e il filo teso di lunghezza L . La forza-peso della massa è esattamente equilibrata dalla tensione del filo. Se spostiamo la massa dalla posizione di equilibrio esso inizia a percorrere un arco di circonferenza di raggio L .

Se consideriamo un piccolo numero di oscillazioni possiamo ammettere che gli attriti siano trascurabili. Così le forze agenti sulla massa sono:

$$m a = F = m g \sin\alpha$$

Dove F è la sola componente della forza agente sulla massa, e α è l'ampiezza dell'angolo formato dal filo con la verticale quando è stato spostato dalla condizione di equilibrio.

Attraverso considerazioni di carattere analitico troviamo che il periodo di un pendolo per piccole oscillazioni (cioè con $\alpha < 15^\circ$) è:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Nel caso di oscillazioni per angoli maggiori di α è più utile riferirci alla legge di conservazione dell'energia meccanica:

$$U + K = \text{cost}$$

cioè:

$$\frac{1}{2} m v^2 + m g h = \text{cost}$$

Nel nostro caso poniamo h_0 la quota in cui il centro di massa si trova in equilibrio stabile.

Ora, nelle condizioni iniziali dell'esperienza, che, lo ricordiamo, sono quelle in cui il pendolo non è in equilibrio stabile, si ha:

$$k = 0 \quad U = mgh_o$$

Alla fine di una oscillazione risulterà invece:

$$U + K = \frac{1}{2}mv^2 + mgh$$

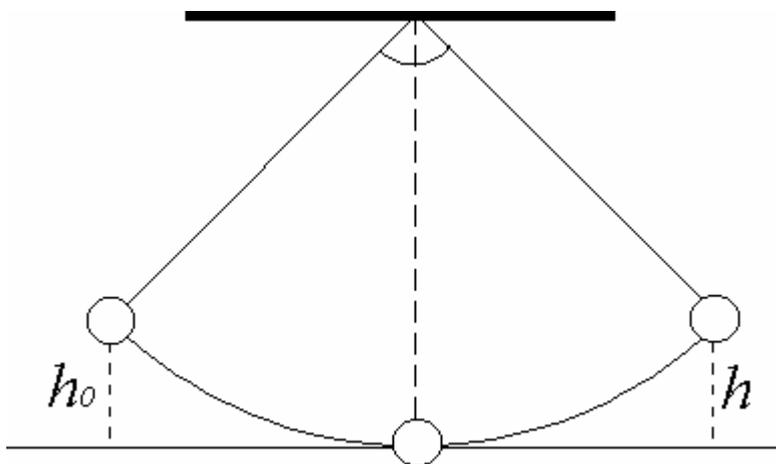
Per il principio di conservazione dell'energia dovrà allora essere:

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgh = mgh_o$$

Ora per considerazioni trigonometriche si ha:

$$h = L - L\cos J$$

$$h_o = L - L\cos J_o$$



Per cui otteniamo la relazione

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgL - mgL\cos J = mgL - mgL\cos J_o$$

Quindi

$$v^2 = 2gL(\cos J - \cos J_o)$$

Ma sappiamo che

$$v = L J^\circ$$

Per cui sostituendo

$$L^2 J^2 = 2gL(\cos J - \cos J_o)$$

Cioè

$$\frac{dJ}{dt} = \left[2\frac{g}{L}(\cos J - \cos J_o) \right]^{\frac{1}{2}}$$

Se poniamo $J = J_0$ si ha

$$dt = \frac{dJ}{\left[2\frac{g}{L}(\cos J - \cos J_0)\right]^{\frac{1}{2}}}$$

Cioè

$$dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{L}{g}} \frac{dJ}{[\cos J - \cos J_0]^{\frac{1}{2}}}$$

Ora, per piccole oscillazioni sappiamo che

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

Per cui

$$dt = \frac{T_0}{2\sqrt{2}\pi} \frac{dJ}{[\cos J - \cos J_0]^{\frac{1}{2}}}$$

Calcolando gli integrali dei due membri e ponendo

$$J = J_0 \quad \text{se} \quad t = 0;$$

$$\text{e} \quad J = 0 \quad \text{se} \quad t = t$$

abbiamo

$$\int_0^t dt = \frac{T_0}{2\sqrt{2}\pi} \int_{J_0}^0 \frac{dJ}{[\cos J - \cos J_0]^{\frac{1}{2}}}$$

cioè

$$t = \frac{T_0}{2\sqrt{2}\pi} \lim_{e \rightarrow 0} \int_{J_0-e}^0 \frac{dJ}{[\cos J - \cos J_0]^{\frac{1}{2}}}$$

chiaramente abbiamo posto $t = t$ quando $J = 0$, cioè $\frac{1}{4}$ del periodo completo.

Allora, poiché noi dobbiamo calcolare il periodo, sicuramente $\frac{1}{4}$ è

$$T = 4t = T_0 F(J_0)$$

dove

$$F(J_0) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \lim_{e \rightarrow 0} \int_{J_0-e}^0 \frac{dJ}{[\cos J - \cos J_0]^{\frac{1}{2}}}$$

Questo tipo di integrale si risolve con la teoria dell'integrale ellittico completo di 1^a specie.

Sicuramente per J_o molto piccolo avremo il risultato visto prima, e quindi $F(J_o) = 1$

In ogni caso si dimostra che
$$F(J_o) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (c_n x^n)^2$$

Dove
$$x = \operatorname{sen} \frac{J_o}{2} \quad c_n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

In questo modo possiamo usare l'approssimazione $\operatorname{sen}^2 \frac{J_o}{2} \approx \left(\frac{J_o}{2}\right)^2$ e limitarci al primo termine della sommatoria.

Acquisizione dei dati

Gli strumenti utilizzati per le misure dirette sono stati:

- Un calibro ventesimale con sensibilità di lettura 1/20 mm per misurare il diametro della sfera.
- Un metro a nastro con sensibilità di lettura 1 mm per misurare la lunghezza dell'anellino e quella del filo.
- Un cronometro digitale azionato manualmente per misurare il periodo delle oscillazioni (sensibilità di lettura 1 cs).
- Un goniometro con sensibilità di lettura di mezzo grado per misurare l'angolo di oscillazione del pendolo.

Con questo esperimento mi propongo di osservare come varia il periodo del pendolo al variare dell'angolo di oscillazione θ e di verificare che tra le due grandezze esiste una proporzionalità di tipo quadratico. Inoltre mi propongo di calcolare il valore della accelerazione di gravità g .

Analisi dei dati sperimentali

Nello svolgimento dell'esperienza ho considerato oscillazioni del pendolo piuttosto grandi che variano tra i 30° e i 60° .

La lunghezza del filo L è una misura indiretta in quanto somma di tre termini misurati direttamente

$$L = L^1 + a + d/2$$

Dove L^1 è la lunghezza del filo effettivamente misurata, a è la lunghezza dell'anellino che collega la sfera al filo e $d/2$ è il raggio della sfera stessa. In questo modo diamo per scontato che il baricentro del sistema si trovi esattamente al centro della pallina: questa è un'approssimazione (abbastanza buona) poiché è evidente che anche l'anellino e il filo hanno una massa, seppur piccola.

Le misure di a e d sono state eseguite una volta sola, così come quella di L^1 : abbiamo così sulle lunghezze solo errori di tipo strumentale e non di tipo statistico.

	a	d	L^1
Misura	0,010 m	0,0360 m	0,860 m
Errore	0,001 m	5×10^{-5} m	0,001 m

L'errore su L è quindi determinato dalla formula di propagazione degli errori assoluti massimi a priori:

$$e_L = \left| \frac{dL}{dL^1} e_{L^1} \right| + \left| \frac{dL}{da} e_a \right| + \left| \frac{dL}{dd} e_d \right| = |e_{L^1}| + |e_a| + \left| \frac{1}{2} e_d \right|$$

Eseguendo i calcoli troviamo che l'errore totale ΔL è: $\Delta L = \varepsilon_L = 0,002 \text{ m}$

Il mio scopo è verificare che per una lunghezza fissata il periodo T è proporzionale a θ^2 .
 Dunque dopo aver fissato la lunghezza $L = 88,8 \pm 0,2 \text{ cm}$, ho raccolto misure per 7 angoli differenti allo scopo di apprezzare leggere variazioni di periodo.
 Perché l'angolo di oscillazione non si smorzasse troppo a causa dell'attrito, ho contato 10 oscillazioni per ogni misura.

Ecco i dati tabulati:

Gradi	30,0	35,0	40,0	45,0	50,0	55,0	60,0
Periodi	19,19	19,28	19,45	19,50	19,65	19,90	20,12
	19,23	19,33	19,34	19,52	19,88	19,95	20,30
	19,23	19,30	19,46	19,53	19,73	19,84	20,32
	19,13	19,25	19,34	19,57	19,66	20,02	20,17
	19,16	19,36	19,36	19,46	19,81	19,83	20,19
	19,24	19,27	19,31	19,62	19,72	19,92	20,28
	19,15	19,31	19,42	19,57	19,62	19,95	20,27
	19,18	19,30	19,32	19,58	19,78	19,86	20,25
	19,22	19,28	19,40	19,55	19,80	19,89	20,36
	19,16	19,32	19,37	19,60	19,85	19,88	20,24
Media	19,19	19,30	19,38	19,55	19,75	19,90	20,25
Dev.St.	0,04	0,03	0,05	0,06	0,08	0,05	0,07
Err.St.	0.01	0.01	0.01	0.02	0.03	0.02	0.02

Poiché a noi interessa la proporzionalità tra periodo e misura degli angoli in radianti a quadrato, dobbiamo fare le opportune trasformazioni (ricordiamo che $\Delta\alpha = 0,5^\circ$). Utilizzando le formule note

$$J^2 = \left(\frac{ap}{180} \right)^2 \qquad \Delta J^2 = \frac{\partial J}{\partial a} \Delta a = \frac{ap^2 \Delta a}{16200}$$

abbiamo le misure su T e θ^2 con i loro rispettivi errori (l'errore totale su T è dato dalla somma in quadratura dell'errore standard con l'errore assoluto).

Angolo	Periodo	Periodo teorico
0,27±0,01	19,19±0,01	19,21
0,37±0,01	19,30±0,01	19,33
0,49±0,01	19,38±0,02	19,47
0,62±0,01	19,55±0,02	19,62
0,76±0,02	19,75±0,03	19,79
0,92±0,02	19,90±0,02	19,98
1,10±0,02	20,25±0,02	20,19

Per vedere se i dati si adattano a una relazione lineare ho calcolato il coefficiente di correlazione r

$$r = \frac{\sum_{i=1}^7 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^7 (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^7 (y_i - \bar{y})^2}}$$

dato
dalla formula

Dove $x_i = \theta_i^2$ e $y_i = T_i$

Eseguendo i calcoli risulta $r = 0,98$ in ottimo accordo con il risultato teorico previsto $r = 1$. Dunque questo risultato ci indica che è probabile l'esistenza di una relazione lineare tra le due variabili.

Curva di massima verosimiglianza

Possiamo ora calcolare i coefficienti relativi all'equazione della retta di best-fit $y = ax + b$ con i loro rispettivi errori; l'equazione della retta così trovata è

$$y = (1,20 \pm 0,07) x + (18,85 \pm 0,04)$$

Le formule che ho utilizzato sono, ponendo $x_i = \theta_i^2$, $y_i = T_i$ e $w_i = 1/\Delta T_i^2$

$$a = \frac{\left(\sum_{i=1}^7 w_i \right) \left(\sum_{i=1}^7 w_i x_i y_i \right) - \left(\sum_{i=1}^7 w_i x_i \right) \left(\sum_{i=1}^7 w_i y_i \right)}{\left(\sum_{i=1}^7 w_i \right) \left(\sum_{i=1}^7 w_i x_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^7 w_i x_i \right)^2} \quad s_a = \frac{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^7 w_i \right) \left(\sum_{i=1}^7 w_i (y_i - ax_i - b)^2 \right)}}{\sqrt{4 \left(\left(\sum_{i=1}^7 w_i \right) \left(\sum_{i=1}^7 w_i x_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^7 w_i x_i \right)^2 \right)}}$$

$$b = \frac{\left(\sum_{i=1}^7 w_i x_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^7 w_i y_i \right) - \left(\sum_{i=1}^7 w_i x_i \right) \left(\sum_{i=1}^7 w_i x_i y_i \right)}{\left(\sum_{i=1}^7 w_i \right) \left(\sum_{i=1}^7 w_i x_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^7 w_i x_i \right)^2} \quad s_b = \frac{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^7 w_i x_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^7 w_i (y_i - ax_i - b)^2 \right)}}{\sqrt{4 \left(\left(\sum_{i=1}^7 w_i \right) \left(\sum_{i=1}^7 w_i x_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^7 w_i x_i \right)^2 \right)}}$$

Possiamo ora costruire un grafico con i dati ottenuti.

Nelle pagine a seguire ho dapprima costruito un grafico ponendo in ascissa i valori degli angoli misurati in radianti e in ordinata i valori dei periodi di 10 oscillazioni misurati in secondi. Il grafico ha l'andamento di una parabola, come peraltro ci si aspettava data la proporzionalità tra i periodi e i quadrati degli angoli. Le due parabole laterali rappresentano il margine di errore della curva di massima verosimiglianza (quella centrale). I dati sperimentali sono quelli segnati in rosso.

Dopo ho tracciato un grafico nel quale ho posto in ascissa il quadrato delle misure degli angoli e in ordinata i periodi di 10 oscillazioni del pendolo. In questo modo il grafico risulta linearizzato : la retta centrale è la retta di best-fit, mentre quelle laterali sono le rette entro le quali cade l'errore del best-fit. Tali rette, inoltre, individuano la striscia di piano in cui si ha il 68,3% di probabilità, rifacendo la stessa esperienza con gli stessi materiali e nelle stesse condizioni, di trovare gli stessi risultati.

Dal grafico si vede come il periodo aumenti in modo apprezzabile al variare dell'angolo di oscillazione. Al tendere di θ^2 a zero la teoria del pendolo semplice ideale ci dice che l'approssimazione $\sin\theta \approx \theta$ è sempre più valida quindi il periodo dovrebbe tendere proprio al valore indicatoci dalla teoria. In questo caso per $L = 88,8 \pm 0,2$ cm corrisponde $T = 18,85 \pm 0,01$ s in buon accordo con la teoria che ci fornisce un valore di $T_0 = 18,89 \pm 0,01$.

Calcolo di g

Possiamo ricavare a questo punto il valore dell'accelerazione di gravità. Infatti dalla formula

$$T = 2p \sqrt{\frac{L}{g} \left(1 + \frac{1}{16} J_o^2 \right)}$$

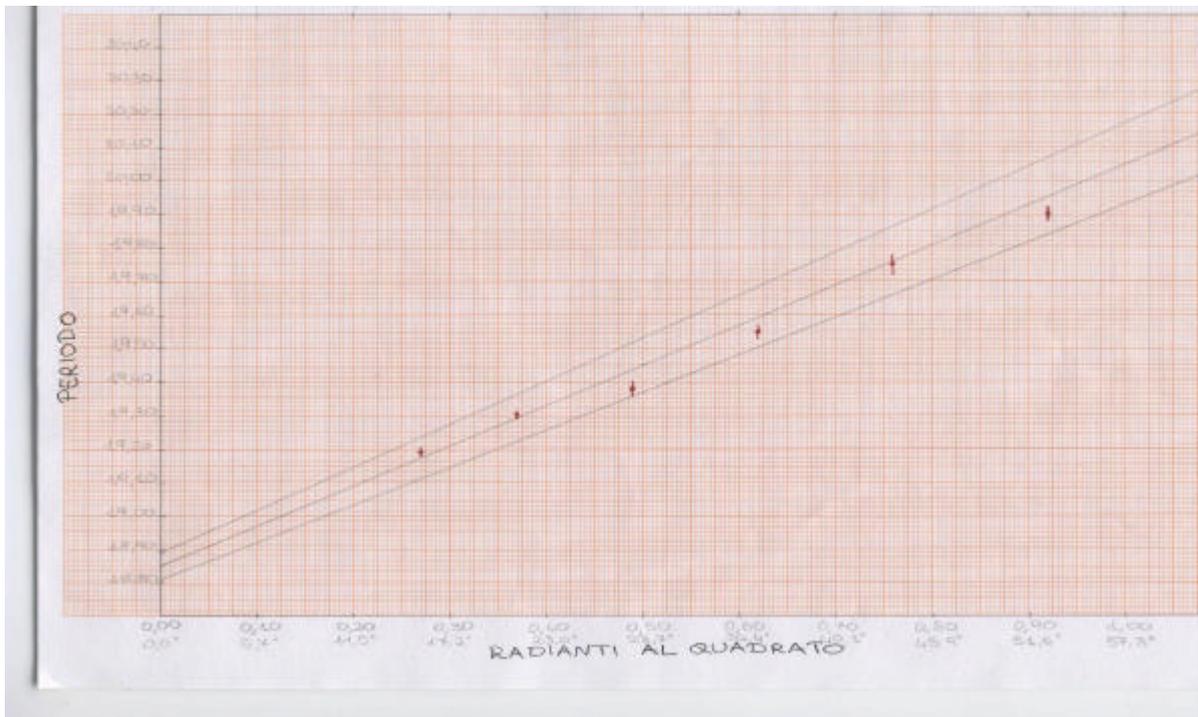
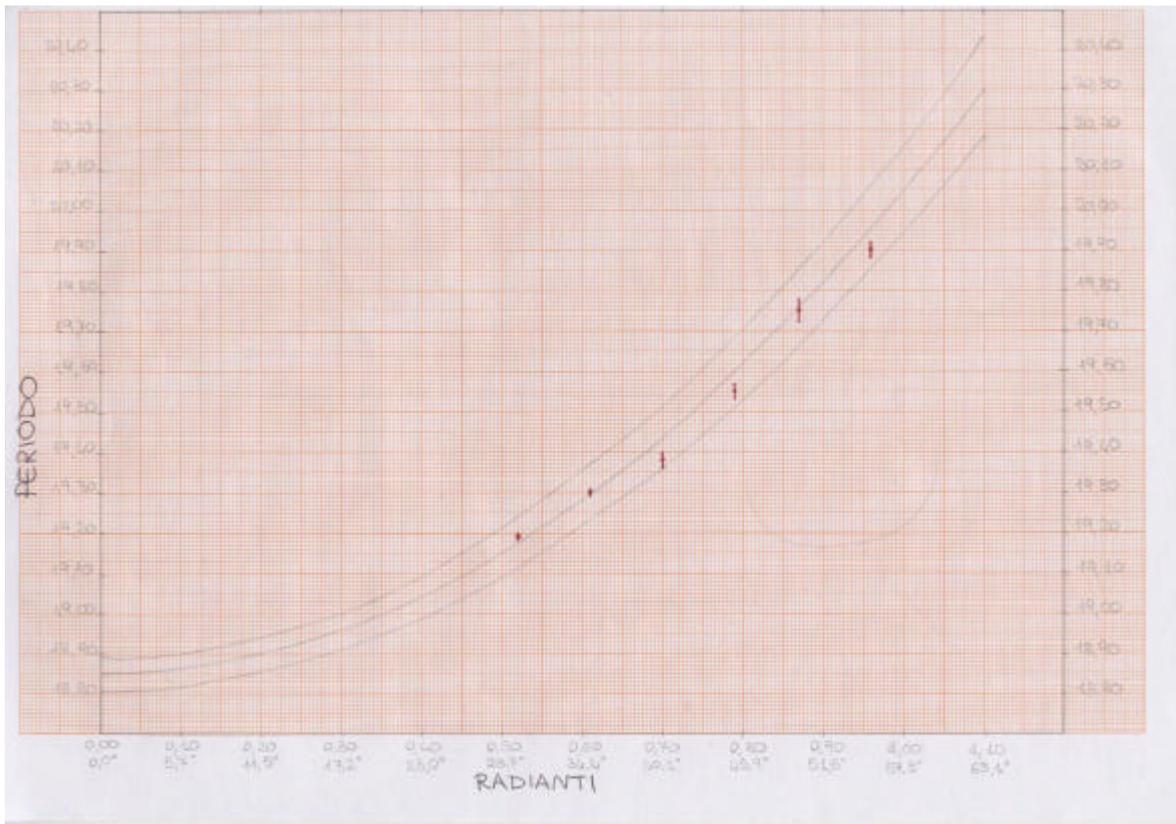
ricaviamo

$$g = \frac{4p^2 L \left(1 + \frac{1}{16} J_o^2 \right)^2}{T^2} \quad \Delta g = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial T} \Delta T \right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial L} \Delta L \right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial J} \Delta J \right)^2}$$

Eseguendo i calcoli e facendo la media tra i diversi valori di g ottenuti ho trovato:

$$\mathbf{g = 9,85 \pm 0,11 \text{ m/s}^2}$$

In ottimo accordo col valore universalmente noto $g = 9,81 \text{ m/s}^2$



Conclusioni

Dall'analisi dei dati per grandi oscillazioni mi sono accorta che il pendolo che si trova in laboratorio potrebbe effettivamente approssimarsi ad un pendolo ideale.

Concludendo credo, però, che sia molto difficile ottenere risultati molto precisi sia per la difficoltà di presa diretta delle misure sia per effetti esterni.

In primo luogo è difficile determinare sia il baricentro del sistema, sia il centro intorno al quale oscilla il pendolo; inoltre non è facile determinare esattamente il punto in cui una oscillazione finisce e quindi vi sono inevitabili errori sul tempo oltre ai normali errori dovuti al tempo di reazione nell'uso del cronometro.

Alcune cause esterne potrebbero essere la non inestensibilità del filo, l'attrito con l'aria (anche se credo che questo sia effettivamente trascurabile), ma soprattutto secondo me incide molto il fatto che il pendolo non descriva esattamente una retta (proiettando il suo moto sul pavimento) ma piuttosto un'ellisse, il che comporta un inevitabile ritardo dei tempi e quindi una sovrastima di g .

In questa esperienza però sono molto più influenti, a mio parere, gli errori strumentali e di presa dei dati, piuttosto che gli effetti esterni.

Bibliografia

- A. Strazzeri, Appunti del corso di laboratorio di fisica I, A.A. 2001/2002
- E.Perucca, Fisica generale e sperimentale, UTET
- J.R.Taylor, Introduzione all'analisi degli errori, Zanichelli
- M.Loreti, Teoria degli errori e fondamenti di statistica, Decibel
- R.Ricamo, Guida alle sperimentazioni di fisica I, casa editrice ambrosiana

Indice

Introduzione teorica e descrittiva	pag.1
Descrizione dell'apparato	pag.1
Scopo dell'esperienza	pag.1
Descrizione teorica dell'esperienza	pag.1
Acquisizione dei dati	pag. 5
Analisi dei dati sperimentali	pag. 5
Curva di massima verosimiglianza	pag. 7
Calcolo di g	pag. 8
Conclusioni	pag. 9
Bibliografia	pag. 9