-Marco Carfagnini-

Classe: V F

La Matematica come una forma d'arte fine a se stessa

Liceo Scientifico Sperimentale di Ciampino

"Vito Volterra"

Anno scolastico 2011/2012

Indice

Inutilità

Universalità

Perfezione

MATEMATICA

Bellezza

Astrazione

Oggettività

Le cinque caratteristiche della Letteratura nelle "Lezioni Americane" di Calvino e quelle della Matematica in "Apologia di un Matematico" di G.H. Hardy

Valore esistenziale della Letteratura in Calvino: tentativo di razionalizzare il caos della realtà

Analogie e differenze tra la visione della realtà di Gadda e Calvino

Dall'*esecuzione sublime* alla rappresentazione di un mondo non tangibile

La poetica del Canova

De Chirico e la Metafisica

Due posizioni antitetiche: *Logicismo* e *Formalismo*.

La *Critica del giudizio* e *l'Introductio in analysin infinitorum*

INTRODUZIONE

Mi piace [...] la libertà della matematica. Se studi fisica o chimica devi descrivere il mondo reale. Ma in matematica puoi costruire le tue strutture. Puoi camminare in mondi creati dall'immaginazione delle persone. Non sei legato al mondo reale. È come essere Dio in un certo senso. Puoi creare mondi, e studiarli. Credo sia per una combinazione della bellezza, dell'immaginazione e della libertà. (Aner Shalev)

Perché risulta difficile apprezzare la bellezza di un teorema o di un ragionamento completamente astratto a differenza, per esempio, di una cattedrale gotica? Per rispondere chiaramente a questa domanda bisogna analizzare perché un'opera d'arte o una poesia possono essere definite *belle.* In pittura possiamo affermare che la bellezza di un quadro si trova nella combinazione armonica di forma, colori, spazio, luce; essa si basa quindi completamente sulla vista. La musica anche è un ottimo esempio molto più vicino alla pittura che alla matematica in quanto necessità dell'uso di un senso fondamentale: l'udito. La letteratura invece, anche se può sembrar strano, possiede molti punti in comune con la matematica: molto semplicemente basta considerare che nel momento in cui noi leggiamo un romanzo o un testo poetico il nostro cervello deve compiere un certo lavoro di *analisi*. La bellezza di un testo poetico risiede nel significato che assumono i vari termini e non è dunque il prodotto di un'attività sensoriale bensì di uno sforzo del pensiero. La matematica come la letteratura ha quindi un valore estetico mediato e non percettivo; vi è però una grande differenza: nella letteratura tale processo di analisi intellettuale risulta decisamente più semplice. Ciò è possibile poiché essa tratta della condizione umana e del suo "cocktail" di passioni che risultano più vicine a noi uomini rispetto alla *freddezza* di una figura geometrica o all'*austerità* di un numero primo. Una poesia, per esempio, è necessariamente dipendente dalla lingua con la quale è stata scritta, e quindi perde di unicità e bellezza nel momento in cui viene tradotta nelle altre lingue. Tale problema non si pone nella matematica, la quale esprime dimostrazioni e concetti tramite formule (equazioni) *universali*; "$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$" è uguale tanto in inglese quanto in urdu; uno dei versi più famosi di Shakespeare: "Shall I compare thee to a summer's day?" perde una parte di sé nel momento in cui diventa: "Ti comparerò dunque ad una giornata d'estate?".

Le qualità fondamentali della matematica sono dunque: **bellezza, universalità, astrazione semplicità, perfezione,** e **oggettività.** Si potrebbe aggiungere anche un'altra caratteristica: l'*utilità*, ma vi è un motivo fondamentale per cui non è stata inclusa tra le altre. Per i fisici e per i matematici applicati un'equazione è affascinante anche per i suoi riscontri utilitaristici, il poter confrontare un ragionamento in apparenza completamente distante da noi con la realtà in cui viviamo è sintomo di grande meraviglia e stupore. Questo però non è assolutamente visto di buon occhio dai matematici puri (torneremo successivamente sulla distinzione tra *puri* e *applicati*); infatti per il vero matematico il riscontrare il proprio ragionamento nella realtà è qualcosa di superficiale, non è questo l'oggetto della sua indagine, egli è interessato soltanto a scoprire, a ricercare i misteri di un mondo del quale il nostro è una banale riproduzione. A tal proposito risulta calzante una citazione tratta da *Apologia di un matematico* di Godfrey Harold Hardy, uno dei maggiori matematici del '900: "*Imaginary universes are so much more beautiful than this stupidly constructed real one*". Con tale affermazione l'autore vuole sottolineare quanto poco interesse c'è da parte della matematica e dei matematici nei confronti del mondo in cui siamo costretti a vivere, a differenza invece di un mondo di idee matematiche. In questo senso possiamo intravedere quasi una ripresa del *platonismo*: in molti ritengono infatti che le idee matematiche abbiano un'esistenza che non dipende in alcun modo da quella dell'uomo, esse sono da sempre lì e rimarranno per sempre lì aspettando di essere scoperte dagli uomini (idea sostenuta ad oggi dalla corrente filosofica/scientifica del *logicismo*). Proprio per tale motivo non si può parlare di invenzione in matematica; anche se alcuni ritengono che tutto parta dall'intelletto umano (in tal caso si tratterà di *formalismo*). Abolita l'utilità, si deduce necessariamente che la matematica deve essere "inutile", termine non inteso nel significato comune ma come disinteresse. L'intento di questo progetto è quello di illustrare una presentazione generale delle formule più interessanti prese da varie rami della matematica, dimostrando che tutte posseggono le caratteristiche di cui sopra con opportuni riferimenti storici.

Nonostante si tratti di un argomento così articolato sono possibili collegamenti con molte discipline, ma per scelta personale sono stati ridotti al minimo e presi in considerazione esclusivamente quelli che non "ingolfassero" il percorso. Le stesse caratteristiche della matematica si possono ritrovare per esempio anche nel pensiero di vari artisti, tra cui principalmente: Canova, Kandinsky, Magritte e De Chirico. Nello scultore neoclassico è presente infatti un forte desiderio di voler innalzare l'opera d'arte da un livello empirico/sensoriale ad uno ontologico, ed è proprio questo nuovo "piano" a suscitare prima l'interesse verso la corrente del Surrealismo con Magritte e successivamente caratterizzerà la poetica di De Chirico nella rappresentazione di un mondo non tangibile.

In ambito prettamente filosofico invece questo *mondo* è rappresentato perfettamente dalla filosofia platonica se ci addentriamo invece nell'ambito delle scienze abbiamo due correnti che si schierano in maniera opposta: *Logicismo* e *Formalismo.* Come già accennato in precedenza, la prima ritiene che la matematica sia una scoperta e non può accettare la *creazione*. Infatti il creatore è colui che genera forme dal nulla e che dunque senza di lui non sarebbero mai state poste in essere, mentre alcune idee matematiche, se non fossero state scoperte nell'antichità, si sarebbero conosciute comunque nel Medioevo o nel Rinascimento. Completamente antitetica è la posizione formalista (di cui tra gli esponenti più famosi ricordiamo Wittgenstein che disse: "Il matematico non scopre: inventa."), che considera la matematica una produzione della mente umana. Risulta molto affascinante il legame che intercorre tra *l'Introductio in analysin infinitorum* di Euler e la *Critica del giudizio* di Kant. Il matematico ci vuole introdurre al concetto di infinitesimo ma non tramite dimostrazioni o postulati bensì intuitivamente senza neanche darci una definizione di cos'è un infinitesimo. Compie una distinzione tra una quantità infinitesimale, che è prossima allo zero ma è diversa da zero e sarà sempre più piccola di qualsiasi numero noi riusciamo ad immaginare; e una infinitamente grande N. Essendo infinitamente grande qualsiasi valore noi sommiamo ad N verrà inglobato da N stesso e sarà quindi valida l'inquietante relazione $N+1=N$. Eulero non si è spaventato di fronte alla mostruosità dell'Infinto bensì lo ha accudito così come Kant con il Sublime. Il filosofo tedesco afferma infatti nella "Critica del giudizio" che "*Il sublime è ciò in confronto a cui ogni altra cosa è piccola.[…]è un sentimento di dolore e al contempo di piacere*"; e questa esegesi altro non è che la spiegazione dell' $N+1=N$ di Euler di cui sopra e così come il sublime essa da un lato ci spaventa e dall'altro ci affascina.

L'obiettivo di questo percorso risulta dunque simile a quello di Italo Calvino quando scrisse *Lezioni Americane* nel 1985, dove s'impegnava a descrivere le cinque caratteristiche che secondo lui rappresentavano la letteratura: Leggerezza, Rapidità, Esattezza, Visibilità, e Molteplicità. Dal saggio risulta chiaro che la letteratura assume una funzione esistenziale: la ricerca della leggerezza come reazione al "peso" del vivere ed il tentativo di dare un ordine alla realtà che appare come un "labirinto", così come la matematica è una forma per estraniarsi ed evadere da questo "labirinto". Antitetica è la visione di Carlo Emilio Gadda il quale invece di *alleggerire* la fatica del vivere considera la realtà come un *pasticciaccio*, che non può essere sottoposto ad un processo catartico bensì rimane in balia del caos, dell'incertezza e dell'indeterminatezza

La matematica può inoltre raggiungere più facilmente delle altre discipline ciò che la parola *immortalità* rappresenta. Come sottolinea Hardy nell' *Apologia* ,il matematico, così come l'artista o il poeta, è un creatore di forme con la differenza che esse sono fatte di idee. Dal momento che un'idea o un concetto ha minor possibilità di deteriorarsi con il passare inesorabile del tempo, rispetto alle parole, si deduce che le scoperte del matematico hanno maggior speranza di essere immortali, in quanto anche se andrà perduta una dimostrazione, prima o poi essa sarà riscoperta da qualcuno, a differenza invece di un'opera d'arte o di una poesia. La matematica raggiunge infatti quella giusta armonia tra la fantasia dell'uomo e la sua capacità di indagare in questo *neo-iperuranio* ed è proprio questa la *conditio sine qua non* per cui la matematica è sia universale sia immortale.

In Sintesi:

Bellezza: ogni formula deve apparire *necessariamente* bella, la bellezza è un qualità fondamentale della matematica e "Non c'è posto al mondo per una matematica brutta"(G.H.Hardy).

Universalità ed *Oggettività:* ogni equazione deve risultare *sempre* vera ed assoluta; questo senso di rigore influisce quindi sulla *Perfezione.*

Semplicità: anche se i concetti espressi implicano un grande sforzo intellettuale per essere compresi, essi devono essere rappresentati in modo chiaro, lineare ed immediato.

Astrazione: la maggior parte delle scoperte matematiche nacque "sulla carta" e soltanto dopo secoli se ne è riscontrata un'applicazione: come nelle geometrie non euclidee o gli studi di Eulero sui numeri complessi relazionati alla trigonometria.

$$e^{i\pi}+1=0$$

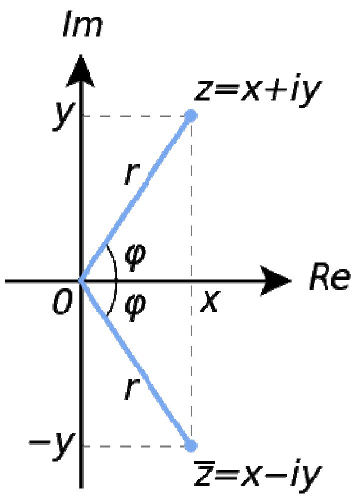
Questo semplice "accostamento" di lettere, simboli e numeri è ad oggi considerato come l'uguaglianza più bella e più completa di tutta la matematica. Scoperta nel diciottesimo secolo dal più grande matematico della storia di sempre: Leonhard Euler. I suoi lavori spaziano dall'analisi infinitesimale alla meccanica celeste e proprio nel campo dell'analisi complessa scoprì la famosa formula di cui l'identità sopracitata è un caso particolare: $e^{i\phi}=\cos\phi+isen\phi$, in cui sostituiamo all'angolo il valore di π. Come disse Benjamin Perice noi non possiamo capir e il significato profondo di questa identità ma dal momento che l'abbiamo dimostrata sappiamo che ***deve*** essere vera ed è straordinaria in quanto riesce a mettere in relazione:

- π: rapporto tra circonferenza e raggio;
- 1:elemento neutro del prodotto;
- \+ e = : operatori fondamentali dell'aritmetica;
- 0: elemento neutro della somma e nullo del prodotto;
- *e*: numero di Nepero;
- *i*: unità immaginaria.

Prima della dimostrazione di tale formula è necessario fare cenni alla storia dei protagonisti:

i

Questo valore nasce nel 1500 per pure *esigenze pratiche* ed è stato introdotto dopo la scoperta della formula risolutiva di un'equazione di terzo grado da parte del matematico/medico italiano Girolamo Cardano. Smentiamo così la concezione popolare secondo cui *i* sia stata scoperta dalla soluzione dell'equazione polinomiale di secondo grado: $x^2+1=0$; si è arrivati infatti successivamente a definire in un modo così rigoroso questa costante. Infatti compariva *sempre* nella risoluzione di un'equazione di terzo grado la radice quadrata di un numero negativo e questo è *impossibile* se rimaniamo all'interno dei numeri reali *R*. La grandezza di Cardano è stata dunque quella di introdurre questo nuovo valore $\sqrt{-1}$ che soltanto successivamente nell'opera di Gauss "Teoria residuorum biquadrato rum" assumerà il nome di *i*(unità immaginaria). Se a Cardano si deve la scoperta su un piano *pratico* a Gauss si deve l'approfondimento *teorico* infatti il matematico tedesco introdusse un nuovo insieme di numeri ancora più grande di quello dei reali: l'insieme *C* dei numeri complessi e l'unità immaginaria assumeva proprio la funzione di ponte, di collegamento tra questi dui insiemi (R e C). Un numero complesso può essere espresso in 3 differenti modi: $a+ib$ (algebricamente); $\rho(\cos\phi + isen\phi)$ (trigonometricamente) ed infine $\rho e^{i\phi}$ (esponenzialmente) dove $\rho=\sqrt{a^2+b^2}$ e $\phi = arcsen\frac{b}{\rho}$ o $\phi = \arccos\frac{a}{\rho}$. E la dimostrazione di Euler consiste proprio nell'aver trovato l'uguaglianza tra la forma esponenziale e quella trigonometrica. Dobbiamo a Gauss anche l'introduzione di un nuovo piano in cui rappresentare i numeri complessi simile a quello cartesiano con la differenza che sulle ascisse è presente la parte reale del numero complesso (*a*) e sull'asse delle ordinate la parte immaginaria (*b*).



π

La storia di π è tra le più affascinanti di tutta a storia della matematica; molto probabilmente già gli egizi e i babilonesi lo avevano scoperto ma fu Euclide il primo a dimostrare che $\frac{C}{2r} = costante$ dove *C = circonferenza* e *r = raggio* ed Archimede a darci un'approssimazione di π: $3+\frac{10}{71} \le \pi \le 3+\frac{10}{70}$ nel 2500 a.C. circa. Nel 150 d.C. Tolomeo trovò 5 cifre decimali di tale valore convinto di confrontarsi con un numero finito di cifre. Questo valore ricorre anche in uno dei tre grandi problemi dell'antichità: la quadratura del cerchio ovvero trovare usando esclusivamente riga e compasso un quadrato avente area pari a quella di un cerchio. Ciò tradotto in linguaggio matematico significa trovare un quadrato di lato $l = r\sqrt{\pi}$ che può apparentemente sembrare banale ma centinaia furono i matematici che ci provarono e *tutti* fallirono finche nel 1761 non se né dimostrò l'irrazionalità. Dobbiamo una così importante dimostrazione al matematico svizzero Lambert che concluse questa affannosa ricerca poiché affermando che un numero è irrazionale significa che non può essere espresso tramite il rapporto tra due numeri generici *a* e *b* e che quindi ha infiniti valori dopo la virgola e non può essere rappresentato tramite un segmento. Circa un secolo dopo questa scoperta il matematico tedesco Lindemann nel 1882 dimostrò anche la trascendenza di π, tale numero quindi non sarà *mai* soluzione di un'equazione polinomiale a coefficienti *interi*: $ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + ...dx^2 + ex + f = 0$. Ad oggi conosciamo circa un miliardo di cifre decimali.

e

La storia di *e* può essere considerata moderna rispetto a quella di π in quanto ha origine nel sedicesimo secolo grazie a John Napier che lo defnì come e successivamente Euler $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ trovò varie serie e successioni che esprimono tale valore. Così come pigreco è stata dimostrata sia l'irrazionalità (da Hilbert) sia la trascendenza (da Hermite). Qualcuno sostiene anche che *e* sia stata usata sia dai greci antichi che dagli egizi, rispettivamente per la costruzione del Partenone e della grande piramide, in quanto in queste costruzioni si trovano lunghezze tipiche che hanno come rapporto il suo valore.

Possiamo capire adesso meglio perché una tal identità ci lascia una così grande meraviglia. Elevando due numeri trascendenti e irrazionali con l'aggiunta dell'unità immaginaria otteniamo un valore finito, e non un comune valore finito ma 1: $e^{\sqrt{-1}\pi} = -1$. Scendiamo però adesso nel dettaglio della dimostrazione di Euler. Egli è ricordato anche per le sue innumerevoli serie e successioni che danno come risultato π, per esmpio: $\pi = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$; $\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Non ci stupiamo quindi se contribuì nell'espressione in successione del Numero di Nepero: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n!}\right) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...$ Sostituendo ad *x* il valore 1 otterremo dunque il valore di

$e = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n!}\right) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ...$ e sarà proprio questa successione la chiave della dimostrazione. Dobbiamo sempre ricordare che noi vogliamo dimostrare l'uguaglianza tra la forma esponenziale e la forma trigonometrica di un numero complesso, ci manca quindi un'espressione tramite una successione del seno e del coseno. Possiamo utilizzare a tal proposito lo sviluppo in serie di Taylor che mette in relazione una funzione con le sue derivate n-sime. $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)x + \frac{1}{2}f''(x_0)x^2 + ... + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)x^n + \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)x^{n+1}$ dove ξ è un punto interno dell'intervallo compreso tra *x* e x_0 e dipendente da *x*, x_0 e *n*. Ci interessiamo del caso in cui $x_0 = 0$ (in tal caso la formula viene comunemente detta di McLaurin) e dobbiamo fare delle considerazioni inerenti le funzioni seno e coseno: sono entrambe continue e derivabili lungo l'asse reale quindi possono essere entrambe sviluppate come serie di potenze su tutto l'asse reale ma con delle differenze. Per *f(x)=senx* avremo *f(0)=0; f'(0)=1; f''(0)=0; f'''(0)=-1* quindi nel caso in cui la derivata sarà dispari avremo come risultato *1* (preso in modulo) e nel caso in cui sia pari avremo *0* e da ciò possiamo dedurre, usando la formula di Mclaurin, che: $senx = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + ...$ Opposta sarà la situazione del coseno il quale ha: *f(0)=1; f'(0)=0; f''(0)=-1; f'''(0)=0* quindi nel caso in cui la derivata sia pari avremo come risultato *1*(preso in modulo) e nel caso in cui sia dispari avremo *0* e deduciamo come per il *senx* la rispettiva espressione del *cosx* tramite la serie di McLaurin: $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{6}x^6 + ...$ Già adesso notiamo delle somiglianze tra l'espressione in serie di *e* e di *senx/cosx*, scriviamo quindi in modo differente l'esponenziale ponendo *x=it*: $e^{it} = 1 + it + \frac{(it)^2}{2!} + \frac{(it)^3}{3!} + ... = 1 + it - \frac{t^2}{2!} - \frac{it^3}{3!} + \frac{it^4}{4!} + \frac{it^5}{5!} - \frac{it^6}{6!} + ...$ raccogliendo adesso a fattor comune otteniamo: $e^{it} = \left(1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \frac{t^8}{8!} + ...\right) + i\left(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \frac{t^9}{9!} + ...\right)$.

Sostituendo adesso *t=x* e le rispettive espressioni del seno e del coseno otteniamo:

$$e^{ix} = cox + isenx$$

Ponendo *x=π* otteniamo la famosa identità.

Distribuzione Normale

Prima di entrare nello specifico di questa particolare distribuzione è necessaria un'introduzione e una differenza tra variabili aleatorie (o distribuzioni) discrete e continue. Tale concetto è un estensione di quello di probabilità: quest'ultima ci permetteva di far riferimento ad un singolo evento senza relazionarlo con quelli precedenti e futuri cosa che avvieni invece in una distribuzione di probabilità. Per esempio: per sapere quanto vale la probabilità che l'altezza di un individuo sia 175 cm usiamo la probabilità mentre invece per calcolare la probabilità che l'altezza di un individuo si compresa tra 170 e 180 cm usiamo una distribuzione. Scendendo nel dettaglio però si possono distinguere 2 categorie di distribuzioni: discrete e continue. Le prime possono assumere esclusivamente valori reali e rispondono alla domanda *quanto vale la probabilità* $P(X = n)$ mentre invece le distribuzioni continue possono assumere tutti i valori e rispondono invece alla domanda *qual è la probabilità che un errore non superi un certa soglia* $P(X < n)$. Ci occupiamo in particolare delle distribuzioni continue in quanto la Normale è una di esse.

Per definire una distribuzione continua di probabilità bisogna assegnare una funzione *f*, detta **densità di probabilità**, che deve soddisfare le seguenti relazioni:

1) $f(x) \geq 0 \forall x \in R$

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

Se prima quindi definivamo l'evento certo come *P(E)=1* ora invece come $-\infty \leq X \leq +\infty$. Dalla seconda proprietà risulta che una variabile aleatoria continua non può assumere un qualsivoglia valore finito *a* in quanto $\int_{a}^{a} f(x)dx = 0$ e quindi *P(X=a)=0.* Possiamo inoltre definire tre valori: media, varianza e deviazione standard.

- Media: $\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$
- Varianza: $\sigma^2 = V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx$
- Deviazione standard: $\sigma = \sqrt{V(X)}$

È importante anche definire la **funzione di ripartizione** di una variabile aleatoria continua: $F(x) = p(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ che si differenzia notevolmente dalla funzione di ripartizione per le variabili aleatorie discrete ($F(x) = p(X \le x) = \sum_{i \le x} p(X = x_i)$). È interessante notare questa differenza che consiste nel non banale passaggio dalla sommatoria all'integrale.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

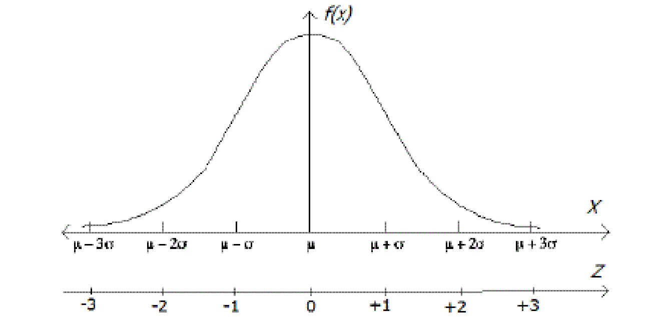


Figura 6.2: Distribuzione normale di probabilità

La media individua la posizione della curva ed al variare di essa la curva si sposta lungo l'asse x, la deviazione standard causa invece una minore o maggiore concentrazione di valori introno alla media rendendo la curva più o meno appiattita. Le caratteristiche che rendono questa curva una delle più affascinanti sono varie:

- ha una forma campanulare e simmetrica intorno alla sua media;
- i valori della media della mediana (unità statistiche che si trovano nel mezzo della distribuzione) e della moda (punto di massima frequenza) coincidono;
- ha due punti di flesso rispettivamente a $\mu - \sigma$ e $\mu + \sigma$ (è concava nell'intervallo compreso fra questi punti e convessa altrove);
- lega tra loro due numeri irrazionali e trascendenti: *e* e *π*.

Dal momento che per ogni coppia di valori di μ e σ si ottengono diverse distribuzioni normali si può racchiudere l'insieme di tutte le distribuzioni in un'unica distribuzione ponendo: $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$ e ottenendo così $f(z) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{2}}$ che rappresenta l'equazione della distribuzione normale standardizzata con $\mu = 0$ e $\sigma = 1$. L'uso della forma standardizzata ci consente di trovare, servendoci delle tavole apposite, la porzione di area compresa tra questi due valori qualsiasi.

Sezione Aurea

Ritenuto ad oggi come il più irrazionale degli irrazionali, la sezione aurea è anche uno dei valori più affascinanti di tutta la matematica in quanto possiede diverse proprietà molto particolari. Policleto già prima di Euclide definisce dei canoni di bellezza e in particolare:

A C B

AB:AC=AC:CB. Poniamo ora $AC = a \quad CB = b$ otterremo: $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \phi$; scrivendo $a = \phi b$ avremo: $\frac{b\phi + b}{b\phi} = \frac{b\phi}{b}$ da ciò segue $\frac{\phi+1}{\phi} = \phi$ ed infine $\phi^2 - \phi - 1 = 0$ da cui $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618033$ e rappresenta il medio proporzionale in una proporzione. La soluzione negativa non viene considerata come rapporto aureo per una questione di eleganza formale, pur essendo anche essa un numero irrazionale. Da questa equazione si possono ricavare molte proprietà di ϕ:

1) dividendo tutto per ϕ avremo: $\frac{1}{\phi} = \phi - 1$ dove $\frac{1}{\phi}$ è uguale al risultato negativo dell'equazione preso in modulo $\frac{1}{\phi} = \left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right|$;

2) dividendo invece per ϕ^2 otteniamo: $1 = \frac{1}{\phi^2} + \frac{1}{\phi}$ da cui $\phi^0 = \phi^{-1} + \phi^{-2}$ e generalizzando $\phi^{n+1} = \phi^n + \phi^{n-1}$;

3) l'ultima caratteristica, forse la più particolare, è quella che mette in relazione tale valore con la successione di Fibonacci. Da un lato infatti l'n-esimo numero della successione è stato dimostrato dal matematico Binet che è definito come: $F_n = \frac{\phi^n - (1-\phi)^n}{\sqrt{5}}$. Inoltre il limite del rapporto tra un numero della serie e il suo predecessore <u>tende a □!</u> $\lim_{n->\infty} \frac{F_{(n+1)}}{F_{(n)}} = \phi$: $L =$ $\lim_{n->\infty} \frac{a_{(n+1)}}{a_{(n)}} = \lim_{n->\infty} \frac{a_{(n)} + a_{(n-1)}}{a_{(n)}} = \lim_{n->\infty}\left(1 + \frac{a_{(n-1)}}{a_{(n)}}\right) = 1 + \lim_{n->\infty} \frac{1}{\frac{a_{(n)}}{a_{(n-1)}}} = 1 + \frac{1}{L}$ quindi $1 + \frac{1}{L} = L$ da cui $L^2 - L - 1 = 0$ perciò $L = \phi$

Ci sono inoltre varie rappresentazioni notevoli di tale valore: tramite una radice quadrata e tramite una frazione continua. $\phi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+...}}}$ tale identità può essere dimostrata in modo molto intuitivo elevando entrambi i membri al quadrato $\phi^2 = 1 + \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+...}}} = 1 + \phi$ da cui

$\phi^2 - \phi - 1 = 0$. Oppure $\phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots}}$ in questo caso bisogna considerare il denominatore: $\phi = 1 + \frac{1}{\phi}$ dalla quale otteniamo sempre $\phi^2 - \phi - 1 = 0$.

Ci sono anche altri due valori sempre irrazionali ma che hanno meno importanza del numero aureo e sono: il numero d'argento e il numero di bronzo. Il primo è il risultato dell'equazione $x^2 - 2x - 1 = 0$ da cui $x = 1 + \sqrt{2}$ $x = 1 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{2}{2 + \dots}}$; il secondo è invece la radice di $x^2 - 3x - 1 = 0$ quindi $x = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$ $x = 3 + \cfrac{3}{3 + \cfrac{3}{3 + \dots}}$.

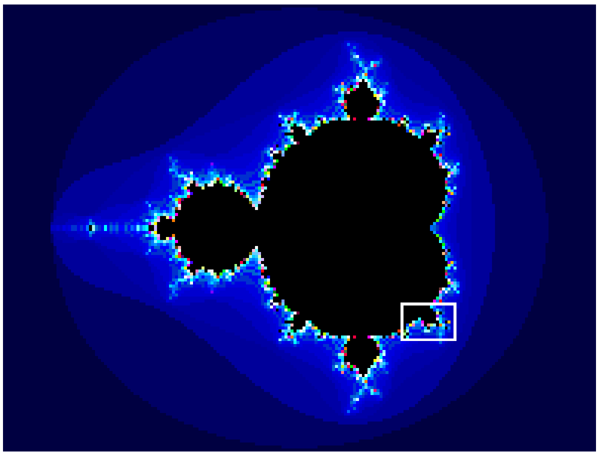
È inoltre degna di nota la relazione tra e e □: $\phi = e^{\operatorname{arcsin} h\frac{1}{2}}$. Ricordando la differenza fondamentale tra questi due valori: pur essendo entrambi irrazionali □ non è trascendente in quanto è il risultato di un'equazione polinomiale a coefficienti interi di grado 2.

Frattali

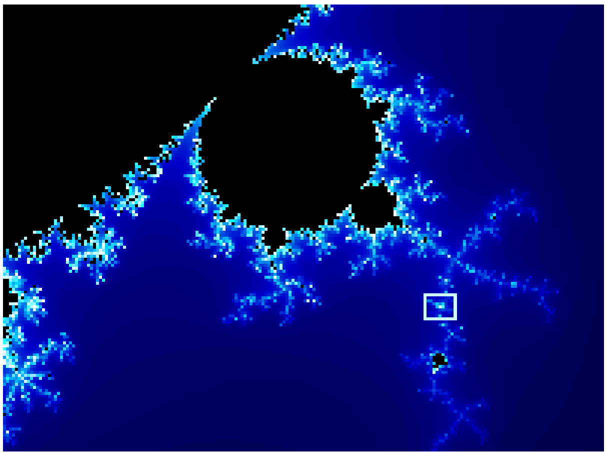
I frattali sono tra gli argomenti più interessanti di tutta la geometria ad oggi conosciuta. Il "pardre" dei frattali è considerato Mandelbrot il quale pubblicò nel 1975 un'opera in cui analizzò tutti gli aspetti di questa nuova geometria; è necessario però ricordare tra gli anticipatori il matematico francese Julia, Hilbert, Koch e Sierpinski. Queste figure hanno all base dei principi inaspettati e innovativi rispetto alla geometria euclidea: l'autosomiglianza ed un nuovo concetto di dimensione geometrica. La cosa che però ci lascia più stupiti e ci desta maggior meraviglia è il fatto che *sono riscontrabili in natura*: negli ananas, nei cavoli, nelle foglie, negli alberi etc…Scendendo adesso nel dettaglio l'autosomiglianza è una caratteristica intrinseca di alcuni corpi i quali si ripetono indefinitivamente a ogni scala di grandezza quindi in termini comuni significa che se ingrandiamo una parte di un frattale otterremo la stesa figura che avevamo in partenza. Più complesso è invece l'ampliamento del concetto di dimensione geometrica non più rigorosa e ben definita: il punto di zero dimensioni, la linea di una dimensione, la superficie di due e il volume di tre; ora dobbiamo introdurre le dimensioni frazionate. Per spiegare visivamente questo concetto Mandelbrot in una delle sue prime conferenze cercò di calcolare la lunghezza della costa della Bretagna riteneva che la dimensione δ di questa misura fosse $1 < \delta < 2$ e disse: "Ecco un primo metodo: si fa avanzare, lungo la costa, un compasso di apertura prefissata τ, ogni passo del quale comincia dove finisce quello precedente. Il valore di τ, moltiplicato per il numero di passi, darà una lunghezza approssimativa $L(\tau)$. Si ripeta l'operazione, rendendo l'apertura del compasso sempre più piccola, **si vede che $L(\tau)$ tende ad aumentare senza limite** […] se misuriamo poi gli scogli e i granelli di sabbia otterremo una lunghezza sempre maggiore". Questo significa, oltre ad avere una dimensione frazionata, che alcune figure frattali **hanno un perimetro tendente ad infinto ma un'area sottesa FINITA**. Consideriamo ora una funzione *D*-dimensionale e dividiamo ogni sua "dimensione" in *N* parti uguali, di cui ciascuna è $\frac{1}{N}$ dell'intero. *N* è detto fattore di scala. Il rapporto di similitudine *r* tra l'inera figura e un singola parte sarà dato da $r = \sqrt[D]{N}$. Esempio: un segmento ($D = 1$) è diviso in N segmenti di lunghezza $\frac{1}{N}$; come è ovvio si hanno per una figura *D*-dimensionale, N^D parti. Poiché $\ln\left(a^b\right) = b\ln(a)$, possiamo scrivere *ln*(numero pezzi)=*Dln*(fattore di scala) quindi $D = \frac{\ln(numerodipezzi)}{\ln(fattorediscala)}$ quindi se consideriamo il segmento: $D = \frac{\ln(N)}{\ln(N)} = 1$; per il quadrato $D = \frac{\ln(N^2)}{\ln(N)} = 2$ e per il cubo avremo $D = 3$.

Prima di indentrarci nelle varie curve e nelle rappresentazioni della computer grafica opportuno definire matematicamente un frattale. Come abbiamo già detto Julia fu tra i primi che si interessò alla fine del diciannovesimo secolo e si specializzò nello studio delle Funzioni Immaginarie (strumenti dell'analisi complessa) e definì un funzione generica: y = x + c dove c è un numero complesso della forma a + ib. Oggi nel linguaggio tecnico questi tipi di funzioni sono dette frattali e c viene chiamato *parametro di controllo* in quanto basta cambiare la sua quinta o sesta cifra decimale e si sconvolge completamente la figura. La grandezza di Mandelbrot consiste nell'aver sostituito al concetto di funzione quello di algoritmo, ovvero un processo ricorsivo, al quale somme

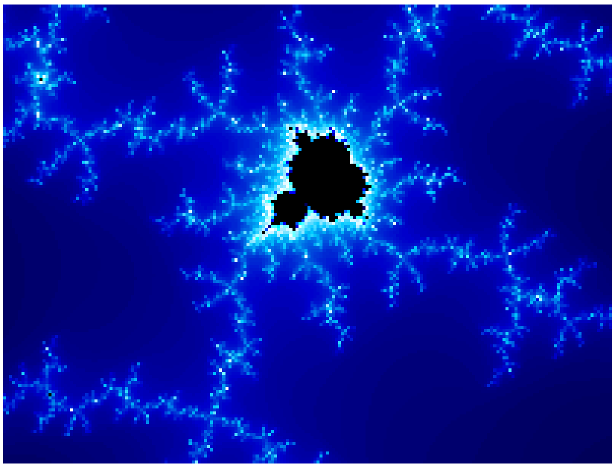
infinite volte ad un numero complesso un parametro idi controllo: $n^2 + c.....(n^2 + c)^2 + c_1....[(n^2 + c)^2 + c_1]^2 + c_{2....}$ Riportiamo adesso la parte pi inaspettata di un frattale ovvero la sua rappresentazione grafica e di come la matematica sia effettivamente Bella.



Il famoso frattale di Mandelbrot.

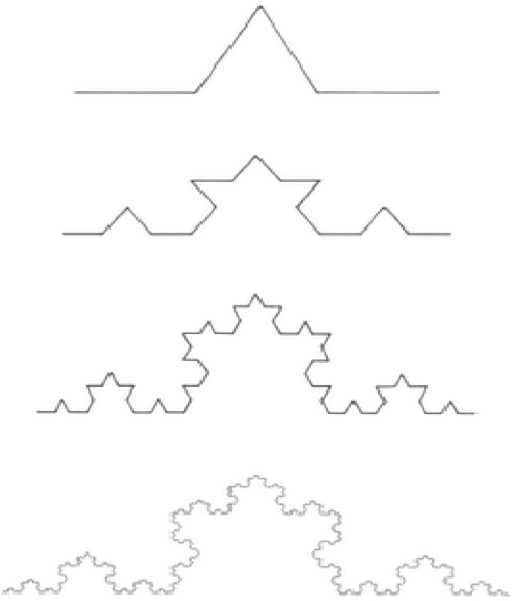


Un ingrandimento del frattale per far notare l'autosomiglianza e la variazione cromatica.



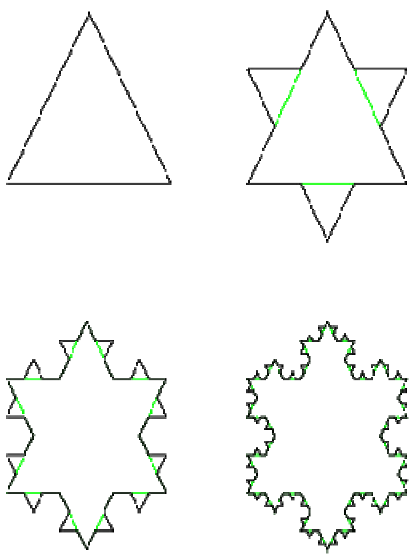
Un ulteriore ingrandimento che ci mostra la proprietà dell'autosomiglianza.

La curva di Koch

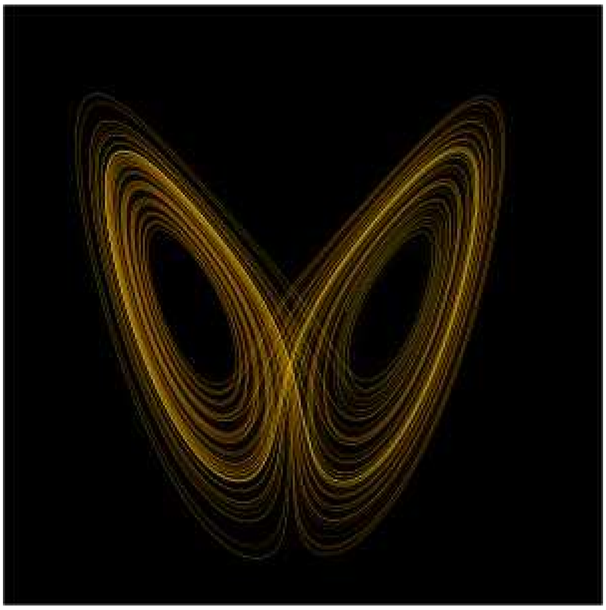


Meglio conosciuta con il nome di Fiocco di Neve èuna curva che ha come punto di partenza un triangolo, lungo il quale si costruiscono altri triangoli come nella figura a fianco. Ma adesso ci focalizzeremo su un'estensione del fiocco di neve: l'isola di Koch. Dato un triangolo equilatero dividiamo ciascun lato in 3 parti e la parte centrale la sostituiamo con un piccolo triangolo di lato pari a $l = \frac{1}{3}$; ogni lato di partenza è costituito in tal modo da una spezzata in 4 parti uguali. Si può dimostrare che per la curva di Koch è valida la seguente relazione, che approssima la dimensione della curva $D = \frac{\ln 4}{\ln 3} \cong 1.26$.

Sapendo che l'area del triangolo di partenza è $\frac{l^2}{4}\sqrt{3}$ e chiamando *A* l'area dell'isola si Koch possiamo utilizzare la seguente proporzione per trovare il valore di *A*: $l^2 : \left(\frac{\ln 4}{\ln 3} l\right)^2 = \frac{l^2}{4}\sqrt{3} : A$ Risolvendo otterremo $A \cong 1.6\frac{l^2}{4}\sqrt{3}$. Questo significa che pur avendo un perimetro tendente ad infinto, l'area sottesa dalla curva tende ad un valore finito d esattamente si dimostra che tende ai $\frac{5}{8}$ dell'area del triangolo iniziale. Il perimetro infinito si può vedere intuitivamente chiamando *N* il numero totale dei lati ed *L* la lunghezza di un lato. $N = 3 * 4^n$ $L = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ Il perimetro sarà dato da *P=N*L* quindi facendone il limite con *n* tendente ad infinito otterremo il valore 0.

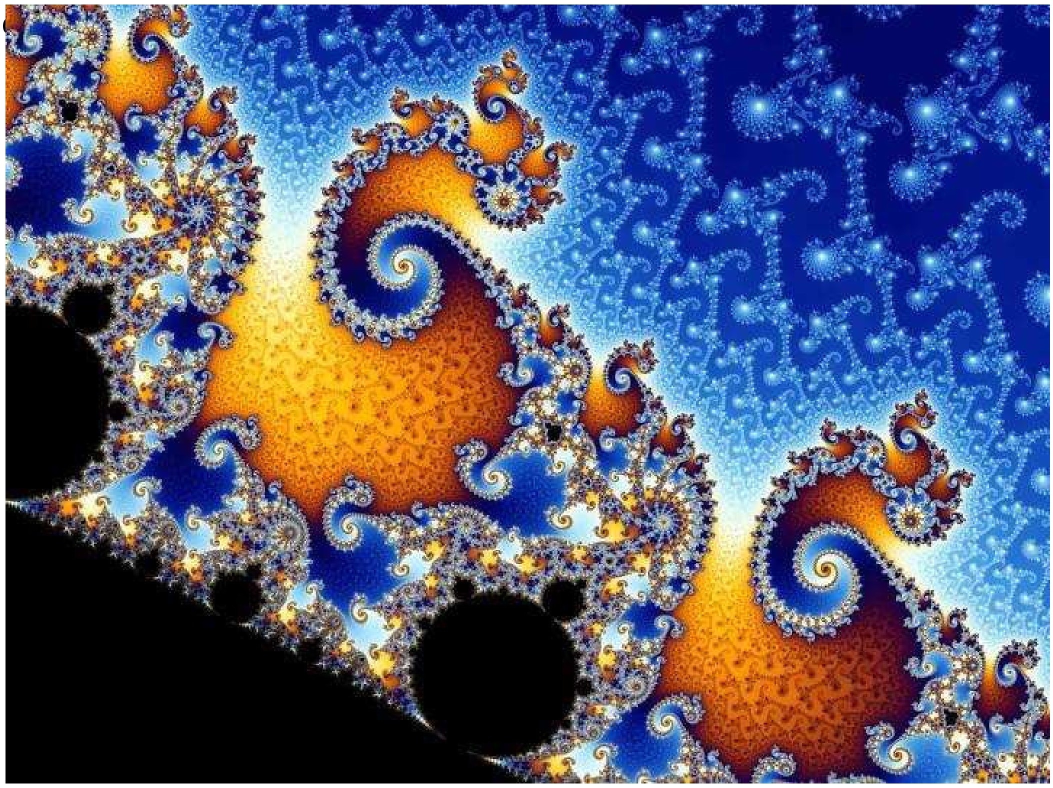


Ci sono molte altre curve frattali ma la loro struttura è simile a quella del triangolo di Koch, tra queste di ricordano Il Pettine di Cantor, La curva di Hilbert e Le Spugne di Menger. È più interessante invece notare come lo studio dei frattali sia risultato molto utile nei paesaggi realizzati tramite il computer: le nuvole, le montagne e gli alberi sono alcuni degli elementi di un paesaggio naturale che al computer si realizzano tramite frattali. Le cellule che partecipano al processo di digestione nello stomaco probabilmente hanno struttura frattale in quanto necessitano di un perimetro molto vasto per assorbire i nutrimenti necessari alla sopravvivenza. Anche in fisica moderna e principalmente nella teoria del Caos si sono riscontrati dei collegamenti con i fattali: se si lascia evolvere un sistema dinamico pr un tempo sufficiente, apparirà nel suo spazio di fase un'insieme di punti che si chiama attrattore. Geometricamente un attrattore può essere un punto, una curva oppure una struttura irregolare; il carattere frattale del caos si manifesta per mezzo di quest'ultimi tipi di attrattori.

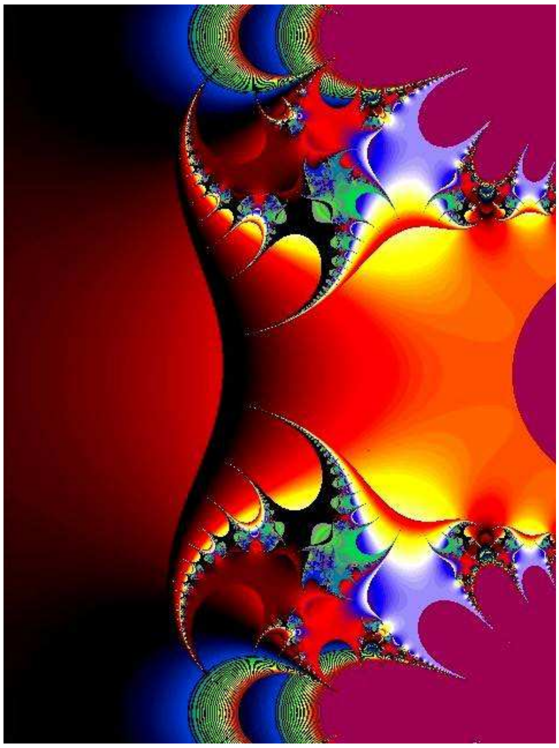


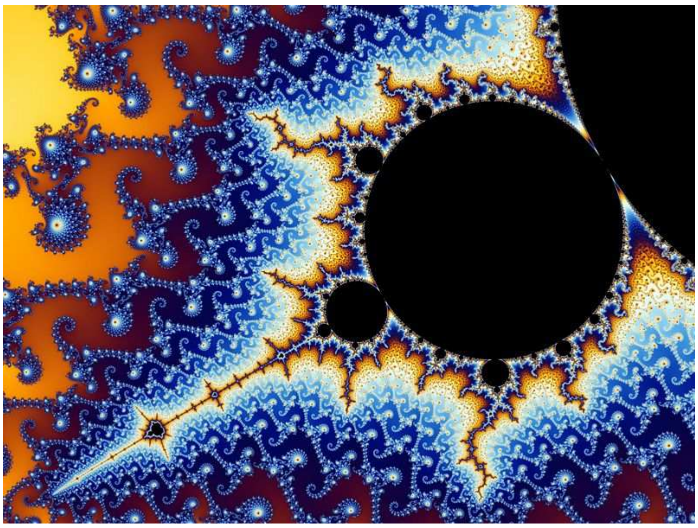
Attrattore di Lorenz

Esempio di frattale in natura: il Cavolfiore



Esempi di frattali in tre dimensioni:

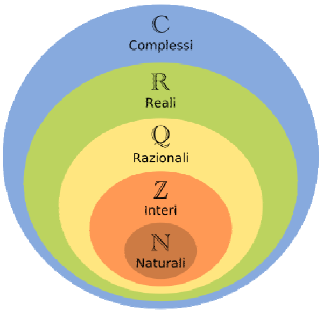




Un pò di Alge

L'algebra è ad oggi uno dei rami più interessanti di tutta la matematica che ha avuto origine nell'antica Persia con Muhammad ibn Musa al-Kwarizmi. Letteralmente significa *aggiustare* nel senso che si risistemava e si riaggiustava un'equazione per renderla risolvibile. Diversi sono i concetti fondamentali su cui si basa questa disciplina: anelli, campi, gruppi, spazi algebrici e soprattutto insiemi; e proprio su quest'ultimi ci focalizzeremo. Potremmo definire un insieme come un raggruppamento di cose ma allora ci dovremmo chiedere cos'è un raggruppamento? Non esiste infatti una definizione di insieme che può essere espressa a parole nel modo più rigoroso e formale possibile bensì ne esiste una nel linguaggio matematico che soddisfa entrambe queste prerogative: . La caratteristica di un insieme fondamentale che poi ci tornerà utile è la sua cardinalità: definiamo ordine o cardinalità di un insieme il numero di elementi di tale insieme. Possiamo inoltre raggruppare tutti i numeri esistenti e non (riferimento ai numeri immaginari) in degli insiemi:

- $\mathbb{N}$ (naturali);
- $\mathbb{Z}$ (interi);
- $\mathbb{Q}$ (razionali);
- $\mathbb{R}$ (reali);
- $\mathbb{C}$ (complessi).



Per esempio: come scriviamo l'insieme dei numeri pari tramite gli insiemi?

$$2Z = \{x \in Z / \exists h \in Z \cup x = 2h\}$$

Sorse però un problema: come si può definire la cardinalità di un insieme con infiniti elementi dal momento che la cardinalità non può essere uguale a infinito? E nella risposta a questa domanda risiede ancora oggi la grandezza di Cantor. Egli introdusse per primo il concetto di numero *transfinito* ovvero un estensione dell'idea comune di numero. In principio definì la cardinalità dei numeri naturali come , il primo numero cardinale transfinito. Successivamente riuscì a dimostrare che in realtà anche **<u>l'insieme dei numeri interi e dei numeri razionali ha cardinalità pari ad !</u>** Questa notizia fu sconvolgente! Significa infatti affermare che all'interno dell'insieme dei numeri razionali ci sono lo stesso numero di elementi dell'insieme dei naturali e questo sembra a prima vista impossibile. L'insieme $\mathbb{N}$ infatti comprende tutti i numeri interi tra 0 e l'infinito positivo mentre $\mathbb{Q}$ tutti i numeri che possono essere espressi anche sotto forma di frazione compresi tra l'infinito negativo e quello positivo. È differente invece la cardinalità dell'insieme dei numeri reali e di quelli complessi che vale o C. Questa prolissa introduzione era necessaria per capire i termini della seguente equazione: $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, tra le più affascinanti di tutta l'algebra.

Bibliografia

- Baldi, G Giusso, S Razetti, M Zaccaria, G (2006) *La letteratua 7 dal dopoguerra ai giorni nostri*, Paravia;

- Duràn, A.J. (2011) *La musa dei numeri*, Mondo Matematico;

- Guedj, D. (2000) *Il teorema del pappagallo*, TEA;

- Hardy, G.H. (1939) *Apologia di un matematico,* Garzanti;

- Lamberti, L Mereu, L e Nanni, A (2009) *Lezioni di matematica 3 con applicazioni informatiche,* Etas;

- Vari autori (2011) *Un nuovo modo di vedere il mondo i frattali*, Mondo Matematico;

- http://it.wikipedia.org/wiki/Gaussiana;

- http://it.wikipedia.org/wiki/Sezione_aurea;

Per le immagini:

- http://www.google.it/imgres?um=1&hl=it&sa=N&biw=857&bih=946&tbm=isch&tbnid=plnJJ4zuq_1JbM:&imgrefurl=http://michelamapelli.wordpress.com/2009/11/30/i-frattali/&docid=vqWzzMHKskB_4M&imgurl=http://michelamapelli.files.wordpress.com/2009/12/frattali044.jpg&w=640&h=480&ei=ovvYT9XnEMXN4QSFmNSZAw&zoom=1&iact=hc&vpx=565&vpy=195&dur=243&hovh=194&hovw=258&tx=224&ty=101&sig=102443756530398246164&page=1&tbnh=134&tbnw=136&start=0&ndsp=20&ved=1t:429,r:11,s:0,i:106:

- http://www.google.it/imgres?num=10&um=1&hl=it&biw=895&bih=946&tbm=isch&tbnid=QNAL17dTzqUz8M:&imgrefurl=http://it.wikipedia.org/wiki/Attrattore_di_Lorenz&docid=6K82lfTf_mLVhM&imgurl=http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/5/5b/Lorenz_attractor_yb.svg/300px-Lorenz_attractor_yb.svg.png&w=300&h=300&ei=FPzYT8CDDM2k4AST6s21Aw&zoom=1&iact=hc&vpx=119&vpy=147&dur=544&hovh=188&hovw=198&tx=133&ty=79&sig=1024437

56530398246164&sqi=2&page=1&tbnh=144&tbnw=166&start=0&ndsp=20&ved=1t:429,r:0,s:0,i:69;

- http://www.google.it/imgres?um=1&hl=it&biw=895&bih=946&tbm=isch&tbnid=uTKqihCiX3VdbM:&imgrefurl=http://veronicafurlotti.wordpress.com/2011/06/05/i-frattali/&docid=yUQ_mwLFTei48M&imgurl=http://veronicafurlotti.files.wordpress.com/2011/06/cavolfiore-frattale.jpg&w=400&h=300&ei=LPzYT9egIYLg4QSXx-GHAw&zoom=1&iact=hc&vpx=273&vpy=151&dur=1015&hovh=194&hovw=259&tx=209&ty=81&sig=102443756530398246164&page=1&tbnh=137&tbnw=183&start=0&ndsp=20&ved=1t:429,r:1,s:0,i:72;

- http://it.wikipedia.org/wiki/File:Mandel_zoom_11_satellite_double_spiral.jpg;

- http://it.wikipedia.org/wiki/File:Mandel_zoom_08_satellite_antenna.jpg;

- http://www.google.it/imgres?um=1&hl=it&sa=N&biw=1141&bih=946&tbm=isch&tbnid=tlMvGnKcjR1nyM:&imgrefurl=http://www.windoweb.it/desktop_foto/foto_frattali_3.htm&docid=lrW-7GZrLdRi5M&imgurl=http://www.windoweb.it/desktop_temi/foto_frattali/Frattali091.jpg&w=1024&h=768&ei=xf3YT9GjCOHl4QT-rKihAw&zoom=1.