

Università degli Studi di Roma “Tor Vergata”

---

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE FISICHE E NATURALI

Corso di Laurea Specialistica in Scienze dell'Universo

TESI DI LAUREA



**EFFETTO SACHS-WOLFE INTEGRATO COME  
STRUMENTO  
DI INDAGINE COSMOLOGICA**

Relatore:  
Dr. Amedeo Balbi

Candidato:  
Fabio Agostini

Correlatore:  
Dr. Paolo Cabella

---

ANNO ACCADEMICO 2011 - 2012



# **Effetto Sachs-Wolfe integrato come strumento di indagine cosmologica**

di

**Fabio Agostini**

GRUPPO DI COSMOLOGIA DELL'UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA"

Settembre, 2012



*a Maria & Giulia Coccia*

*“Noi non cesseremo la nostra esplorazione  
e la fine di tutto il nostro esplorare  
sarà giungere là dove siamo partiti  
e conoscere quel posto per la prima volta”*

*A Love Song for Bobby Long*



# Sommario

Uno degli enigmi più profondi con i quali si confronta la scienza contemporanea è certamente il problema della cosiddetta *costante cosmologica*  $\Lambda$ .

Questo termine fu aggiunto, solo in seguito, da Albert Einstein alle equazioni della relatività generale.

Ritenendo che l'Universo dovesse essere globalmente statico, Einstein nella sua trattazione, aveva bisogno di una forza repulsiva per impedirne il collasso, allo scopo di ottenere una soluzione nella quale la costante cosmologica, assumendo un valore critico, compensasse l'implosione dell'intero Universo.

La scoperta di Edwin Powell Hubble, nel 1929, della relazione lineare tra il redshift (spostamento verso il rosso) della luce emessa dalle galassie e la loro distanza: tanto maggiore è la distanza della galassia e tanto maggiore sarà il suo redshift, convinse gli astronomi che l'Universo è in espansione.

Tuttavia porre a zero  $\Lambda$  non sembra risolvere il problema, infatti la mancanza di un qualche principio di simmetria non giustifica a priori tale scelta.

Anche i modelli in espansione possono includere la costante cosmologica, il cui significato fisico è ad oggi associato all'energia del vuoto e dalla teoria dei campi la sua stima conduce ad un contributo proporzionale al tensore metrico  $g_{\mu\nu}$ , simile a  $\Lambda$  [13].

Verso la fine degli anni novanta, grazie anche al progressivo miglioramento tecnologico degli strumenti osservativi, le ricerche sulle supernovae di tipo Ia, che costituiscono delle buone candele standard, suggerirono che l'espansione dell'Universo fosse accelerata, comportamento che può essere descritto da un termine costante come  $\Lambda$  nelle equazioni di campo [22].

Oggi queste teorie sono state confermate dagli studi relativi alle oscillazioni derivanti dalle fluttuazioni nella distribuzione del plasma caldo presente nell'Universo primordiale: *Baryon acoustic oscillations* (BAO).

Fondamentale, per la piena comprensione di questi argomenti, è l'analisi della *Cosmic Microwave Background Radiation* (CMBR).

La radiazione elettromagnetica residua prodotta dal Big Bang, la quale permea l'intero Universo, fu scoperta nel 1964 dagli astronomi americani Arno Penzias e Robert Woodrow Wilson, e ad oggi, sembra essere il terreno più fertile con il quale è possibile stabilire, con un elevato grado di precisione, i parametri cosmologici: ovvero l'insieme dei valori fondamentali che definisce il nostro Universo.

Questo lavoro utilizza le mappe del settimo anno del *Wilkinson Microwave Anisotropy Probe* (WMAP) [24], satellite Nasa di classe media facente parte della missione spaziale di Explorer, che tra i suoi obiettivi primari ha quella di misurare le differenze della temperatura nella radiazione cosmica di fondo.

Dall'analisi di queste mappe e di quelle provenienti dalla NRAO VLA Sky Survey (NVSS) [15], si vuole estrapolare il segnale di *Integrated Sachs-Wolfe* (ISW) mediante l'utilizzo del metodo statistico di cross-correlazione basato su una nuova costruzione delle Spherical Wavelets: le Needlets.

La verifica di questo effetto permetterà di mettere dei limiti sul valore della  $\Lambda$  [21].



# Ringraziamenti

*Desidero ringraziare tutti i componenti del gruppo di Cosmologia di Tor Vergata, dal Dott. Nicola Vittorio per avermi proposto il lavoro di Tesi al mio relatore Amedeo Balbi, il quale mi ha avvicinato alla Cosmologia molto prima che iniziassi a seguire i suoi corsi e che ha sempre saputo suscitare in me interesse, grazie alla sua passione per l'astrofisica che riesce a trasmettere con stupefacente capacità.*

*Un infinito grazie va al mio correlatore Paolo Cabella, che mi ha saputo guidare in questo lungo lavoro di Tesi sapendo tirare fuori il meglio da me anche nei momenti di difficoltà e alla fine si è rivelato essere molto più che una guida ma un amico.*

*A Davide Pietrobon dico grazie per le tante nottate passate a programmare su un filo lungo da Roma a Los Angeles, ma non solo per quello, a lui devo tanto per questo lavoro e come amico. Ringrazio inoltre Giancarlo De Gasperis per la sua disponibilità e le nostre sigarette.*

*Inoltre il mio pensiero va a tutte le persone che in questi anni hanno fatto parte della mia vita universitaria, dal gruppo di studio, ai ragazzi dell'aula dottorandi che mi hanno accolto in questi mesi, al gruppo Altea con il quale ho avuto il piacere di lavorare e stringere un bel rapporto anche fuori Sogene.*

*Ringrazio la mia famiglia per il sostegno economico ma soprattutto morale che mi ha dato in questi anni, i miei genitori per l'immensa fiducia che hanno riposto in me, mia sorella e la piccola Giulia.*

*Ringrazio il gruppo di San Lollo, tutti, perchè con loro ho potuto esplorare un'altra fisica. Ringrazio Chiara Grasso la distanza ha solo reso in questi anni la nostra amicizia più vera e bella. Un ultimo grazie, ma non meno importante, va al gruppo di Morena in particolare ad Alessandro Siglioccolo, Andrea Mauri, Daniele Giovannetti, Lorenzo Mancini e Oscar Amici per me come fratelli.*



# Indice

<b>Sommario</b>	<b>iv</b>
<b>Ringraziamenti</b>	<b>vii</b>
<b>1 Lo scenario cosmologico</b>	<b>1</b>
1.1 Ipotesi di lavoro . . . . .	4
<b>2 Teoria delle perturbazioni</b>	<b>9</b>
2.1 Linearizzazione delle equazioni . . . . .	9
2.2 L'equazione di Boltzmann . . . . .	10
2.2.1 L'equazione all'ordine zero . . . . .	17
2.2.2 L'equazione al primo ordine . . . . .	18
2.2.3 I termine di collisione $C[f]$ per i fotoni . . . . .	18
2.3 Equazioni per le altre specie di particelle . . . . .	24
2.3.1 Equazione di Boltzmann per la CDM . . . . .	24
2.3.2 Equazione di Boltzmann per i barioni . . . . .	27
<b>3 Anisotropie primarie della CMB</b>	<b>29</b>
3.1 Equazioni per i potenziali . . . . .	29
3.1.1 Le anisotropie su grandi scale . . . . .	31
3.1.2 Il regime di tight-coupling . . . . .	34
3.1.3 La diffusione e il damping . . . . .	38
3.2 Il free streaming . . . . .	38
3.3 Predizione di anisotropie: i $C_l$ . . . . .	42
3.4 L'effetto Sachs-Wolfe . . . . .	43
<b>4 Osservazioni della Radiazione Cosmica di Fondo</b>	<b>45</b>
4.1 Timeline della CMB . . . . .	46
4.2 Wilkinson Microwave Anisotropy Probe . . . . .	47
4.2.1 Caratteristiche tecniche della sonda WMAP . . . . .	47

4.2.2	Hierarchical Equal Area isoLatitude Pixelization . . . . .	49
4.2.3	Le mappe risultanti dai dati del 7° anno di WMAP . . . . .	50
<b>5</b>	<b>Analisi statistica</b>	<b>53</b>
5.1	La media d'ensemble . . . . .	53
5.2	Funzione di correlazione a due punti . . . . .	54
5.3	Spettro di Harrison-Zeldovich . . . . .	56
5.4	Fluttuazioni su una superficie sferica . . . . .	58
5.4.1	Lo spettro di potenza . . . . .	59
<b>6</b>	<b>Segnale Integrated Sachs-Wolfe</b>	<b>63</b>
6.1	Le Spherical Needlets . . . . .	65
6.2	Le mappe utilizzate per l'analisi dati . . . . .	66
6.3	Cross-correlazione tra CMB e LSS . . . . .	69
6.3.1	Simulazioni di CMB e di LSS . . . . .	70
6.3.2	Autospettri di galassie . . . . .	71
6.3.3	Detezione del segnale ISW . . . . .	72
6.4	Chi-square test . . . . .	74
<b>7</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>77</b>

# Elenco delle tabelle

- 1.1 Parametri cosmologici per il modello standard  $\Lambda$ CDM da WMAP 7 anni . 6



# Elenco delle figure

1.1	Mappa della radiazione cosmica di fondo ottenuta con WMAP 7 anni . . .	5
1.2	Parametri cosmologici . . . . .	7
3.1	Evoluzione super-horizon del potenziale in un modello CDM in assenza di barioni . . . . .	32
3.2	Andamento dello sfasamento tra il monopolio e il dipolo alla ricombinazione in un modello standard CDM . . . . .	36
3.3	La funzione di visibilità nel regime di free streaming . . . . .	41
4.1	Spettro di Temperatura per la radiazione cosmica di fondo . . . . .	45
4.2	La sonda WMAP . . . . .	48
4.3	Rappresentazione della pixelizzazione su una sfera a diverse risoluzioni . . . . .	49
4.4	Le mappe di WMAP 7 anni nelle cinque frequenze del microonde . . . . .	52
5.1	Spettro di potenza delle fluttuazioni della radiazione cosmica di fondo . . . . .	60
6.1	Picchi di anisotropia con andamento dei segnale di Sachs-Wolfe ed Integrated Sachs-Wolfe . . . . .	64
6.2	Mappe di galassie provenienti dall' NRAO VLA Sky Survey (NVSS) ottenute con quattro tresholds diverse . . . . .	66
6.3	Mappa di temperatura ILC ottenuta dalla combinazione lineare dei vari canali di WMAP 7 anni . . . . .	67
6.4	Mappa di galassie acquisita dalla NRAO VLA Sky Survey . . . . .	67
6.5	Mappa della maschera di temperatura . . . . .	68
6.6	Mappa della maschera NVSS . . . . .	68
6.7	Mappa di combinazione della maschera di temperatura e della maschera NVSS . . . . .	68
6.8	Mappe simulate di CMB e di LSS . . . . .	70
6.9	Cross-correlazione del segnale simulato di ISW . . . . .	70
6.10	Potenza del segnale per le mappe di galassie, la quale dipende dalla scelta della threshold . . . . .	71
6.11	Istogramma di un campo stellare con diverse possibilità di scelta per la threshold . . . . .	72

6.12	Cross-correlazione tra la mappa ILC e la NVSS sono mostrati i coefficienti $\beta_j$ . . . . .	72
6.13	Power spectrum di Cross-correlazione tra la mappa ILC e la NVSS . . . . .	73
6.14	Cross-correlazione tra la mappa combinata dei canali Q,V,W e la ILC sono mostrati i coefficienti $\beta_j$ . . . . .	73
6.15	Power spectrum di Cross-correlazione tra la mappa combinata dei canali Q,V,W e la ILC . . . . .	74
6.16	Chi-square test per la mappa ILC e le varie mappe di galassie NVSS . . . . .	75
6.17	Confronto del Chi-square test per la mappa ILC e la mappa Q,V,W . . . . .	75



# Capitolo 1

## Lo scenario cosmologico

La moderna cosmologia si fonda su due pilastri fondamentali: la relatività generale ed il principio cosmologico.

La prima, ben nota, è stata pubblicata nel 1916 da Albert Einstein, descrive l'interazione gravitazionale non più come un'azione a distanza fra corpi massivi come avviene nella teoria newtoniana, ma come il risultato della legge fisica che lega energia e impulso con la geometria dello spazio-tempo.

Il principio cosmologico afferma che l'Universo è omogeneo e isotropo: la Terra, così come il Sistema Solare e la Via Lattea non occupano una posizione privilegiata e questa proprietà è possibile estenderla in generale. L'isotropia assicura che le proprietà fisiche medie dell'Universo non sono dipendenti da particolari direzioni permettendo di scrivere la metrica nella forma

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R(t)^2 \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] \quad (1.1)$$

dove  $c$  indica la velocità della luce, mentre:

$$r = \Sigma(\chi) \equiv \begin{cases} \sin(\chi) & k = +1, \text{ curvatura positiva} \\ \chi & k = 0, \text{ curvatura zero} \\ \sinh(\chi) & k = -1, \text{ curvatura negativa} \end{cases}$$

con  $(\chi, \theta, \phi)$  si indicano le coordinate sferiche comobili le quali non variano per un oggetto che segue l'espansione dell'Universo.

Al variare del valore  $k$

$$\frac{dr^2}{1 - kr^2} = d\chi^2$$

definendo  $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$  la parte angolare della metrica, otteniamo

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) [-r^2(d\chi^2 - \Sigma^2(\chi) + d\Omega^2)]. \quad (1.2)$$

La formula 1.2 prende il nome di metrica di Friedmann-Robertson-Walker (FRW) e descrive, su grande scala, un Universo omogeneo, isotropico in espansione o in contrazione.

Il fattore di scala dell'Universo  $R(t)$  al tempo  $t$ , che compare nell'equazione 1.2 è legato al redshift dalla relazione

$$\frac{R(t)}{R_0} \equiv a(t) = \frac{1}{1+z} \quad (1.3)$$

così scritto il fattore di scala al tempo presente è normalizzato a 1.

Interessante è osservare come la legge di Hubble permetta di ritrovare le proprietà di omogeneità e isotropia dell'Universo.

Infatti dalla definizione di tempo comobile

$$\eta = \int_{t_0}^t \frac{dt'}{a(t')}$$

e da quella relativa alla funzione di Hubble, dove al presente misurata in termini di  $h^1$  vale  $H_0 = 100 h \text{ Km} \cdot \text{Mpc}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ , con

$$H(t) \equiv \frac{\dot{a}}{a} \quad (1.4)$$

si ottiene l'equazione dell'orizzonte comobile  $S$ : due eventi separati più di questa distanza sono fuori dall'orizzonte causale e non hanno mai scambiato informazioni

$$S = \int_{t_0}^t \frac{dt'}{a(t')} = \int_0^1 \frac{da'}{a'^2 H(a')}. \quad (1.5)$$

Un modo per determinare le distanze in astrofisica è misurare l'angolo  $\theta$  sotteso ad un oggetto di dimensione fisica  $l$ , assumendo che l'angolo sia piccolo, la distanza angolare dell'oggetto è data da

$$d_A = \frac{l}{\theta} \quad (1.6)$$

---

<sup>1</sup> $h = 0.72 \pm 0.082$   
 $\text{pc} \cong 3.08568025 \times 10^{16} \text{m}$

utilizzando la definizione del fattore di scala 1.3 e di orizzonte comobile 1.5, l'angolo sotteso è  $\theta = (l/a) / S(a)$ , quindi

$$d_A = aS = \frac{S}{1+z}$$

si noti come la distanza angolare tende ad essere uguale alla distanza comoviente a basso redshift, ma diminuisce in realtà a redshift molto grande. In un Universo piatto, oggetti ad alto redshift appaiono più grandi di quanto farebbero a redshift intermedio. Un altro modo per misurare le distanze in astrofisica è tramite la “distanza di luminosità”: la distanza a cui una sorgente di luminosità intrinseca  $L$  è misurata da un osservatore che ne misura il flusso  $F$

$$d_l = \sqrt{\frac{L}{4\pi F}}. \quad (1.7)$$

Le equazioni di campo di Einstein descrivono la curvatura dello spazio-tempo in funzione della densità di materia, dell'energia e della pressione

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - R\frac{1}{2}g_{\mu\nu} = 8\pi GT^{\mu\nu} \quad (1.8)$$

per consentire una soluzione stazionaria Einstein introdusse il termine di costante cosmologica

$$G_{\mu\nu} = 8\pi GT^{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu}.$$

Le equazioni di campo della relatività generale possono essere risolte sotto l'ipotesi di omogeneità e isotropia dell'Universo dove i suoi costituenti sono considerati un fluido perfetto, dalla soluzione dell'equazioni di Einstein e la metrica FRW si giunge all'equazioni di Friedmann [18]

$$H^2 = \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{kc^2}{R^2} + \frac{1}{3}\Lambda \quad (1.9)$$

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4}{3}\pi G(\rho + 3p) \quad (1.10)$$

e l'equazione di adiabaticità

$$\dot{\rho} = -3H(\rho + p) \quad (1.11)$$

dove la derivata è temporale,  $G$  è la costante di Newton,  $\rho$  indica la densità totale dell'Universo e  $p$  la pressione.

Nel caso di curvatura nulla si definisce la densità critica, la quale stabilisce una relazione diretta tra la densità dell'Universo e il valore assunto dal parametro di Hubble

$$\rho_{crit}(t) = \frac{3H^2(t)}{8\pi G}$$

si possono riscrivere le equazioni di Friedmann in modo più compatto, esprimendo il contributo dei diversi costituenti dell'Universo tramite il parametro adimensionale

$$\Omega_i = \frac{\rho_i(t)}{\rho_{crit}(t)}. \quad (1.12)$$

Considerando un Universo piatto, si può sostituire l'espressione 1.12 nell'equazione di Friedmann 1.9 ed osservare che la somma di tutti i parametri di densità è 1

$$1 = \frac{8\pi G\rho}{3H^2} - \frac{kc^2}{H^2R^2} + \frac{1}{3} \frac{\Lambda}{H^2}$$

alla densità contribuiscono due termini  $\rho = \rho_R + \rho_m$  con  $\Omega_m = \rho_m/\rho_c$ ,  
 $\Omega_R = \rho_R/\rho_c$ ,  $\Omega_\Lambda = \Lambda/3H^2$  l'equazione 1.9 assume la forma

$$1 = \Omega_m + \Omega_R - \frac{kc^2}{H^2R^2} + \Omega_\Lambda. \quad (1.13)$$

Definendo il parametro dell'equazione di stato  $w_i = p_i/\rho_i$  per ciascuna componente dell'Universo, se si considera il caso in cui è non interagente, segue l'equazione di adiabaticità

$$\dot{\rho}_i = -3H\rho_i(1 + w_i) \quad (1.14)$$

dove  $w_i$  assume valore 0 per la materia non relativistica, 1/3 per la radiazione e  $-1$  per la costante cosmologica.

## 1.1 Ipotesi di lavoro

La scoperta del fondo cosmico di radiazione isotropa avente uno spettro di corpo nero alla temperatura di circa 3 gradi Kelvin è, ad oggi, la prova più convincente della teoria del Big Bang "caldo". Negli ultimi anni, misure accurate di questa radiazione hanno mostrato in essa la presenza di lievi anisotropie, a livello di dieci parti per milione.

Tali fluttuazioni, previste teoricamente oltre vent'anni prima di essere state analizzate e rivelate solo grazie alla moderna tecnologia, sono la traccia inconfondibile delle perturbazioni di densità presenti nell'Universo primordiale da cui, per amplificazione gravitazionale, ha avuto origine la struttura su larga scala che oggi osserviamo.

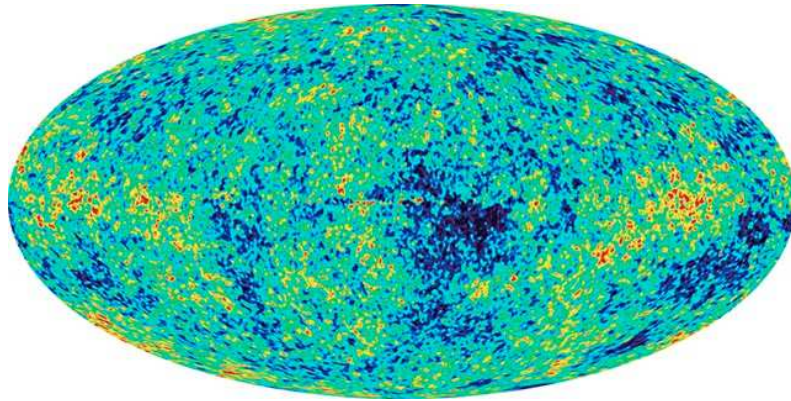


Figura 1.1: Mappa della radiazione cosmica di fondo ottenuta con WMAP 7 anni.

L'idea di base è che, attraverso una fase inflazionaria il volume dell'Universo primordiale sia cresciuto in modo esponenziale guidato da un campo scalare, le cui fluttuazioni quantistiche amplificate dall'espansione si ipotizzano essere di tipo gaussiano. Si può predire uno spettro per le perturbazioni di tipo esponenziale:  $P(k) = Ak^n$ , con delle perturbazioni trattate, finchè sono ipotizzate essere piccole, nel contesto della teoria lineare, quando  $\delta\rho/\rho \approx 1$  la trattazione diventa a n-body.

Questa forma per lo spettro di potenza assicura che si abbia più potenza nelle piccole scale e che si formino di conseguenza strutture di piccola dimensione da cui poi sotto l'effetto gravitazionale ne nasceranno sempre di più grandi, questo scenario prende il nome di *Hierarchical Clustering*.

Ad oggi sono varie le osservazioni nei vari campi dell'astrofisica: lo studio della CMB, misure dell'abbondanza di elementi leggeri, la comprensione della formazione di strutture su larga scala, che sembrano convergere tutte nell'affermare che viviamo in un Universo piatto.

Dalla stima dei parametri cosmologici si conclude che ci deve essere circa un 73% di densità dell'Universo costituito da una componente non collisionale, non interagente e non Cold Dark Matter (CDM). Questa componente oscura, mai rilevata direttamente, prende il nome di *Dark Energy* (DE) [25].

Parametri cosmologici	Valori stimati
$\Omega$	0.98 – 1.08
$\Omega_{baryon}$	0.04 – 0.06
$\Omega_{\gamma}$	$\cong 5 \times 10^{-5}$
$\Omega_{DarkMatter}$	0.20 – 0.23
$\Omega_{DarkEnergy}$	0.70 – 0.75

Tabella 1.1: Parametri cosmologici per il modello standard  $\Lambda$ CDM da WMAP 7 anni.

Una delle proprietà fondamentali della dark energy è quella di avere il parametro dell'equazione di stato  $w_{DE}$  negativo, l'equazione 1.10 può essere scomposta in una componente temporale

$$\ddot{R} = -\frac{4\pi}{3}G \left( \rho + 3\frac{p}{c^2} \right) R$$

ed in una componente spaziale

$$R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 + 2kc^2 = 4\pi G \left( \rho - \frac{p}{c^2} \right) R^2$$

dall'equazione tempo-tempo si giunge alla condizione  $w = p/\rho \leq -1/3$  in modo da consentire un'espansione accelerata dell'Universo.

In meccanica quantistica e teoria dei campi, un valore dell'energia dello stato fondamentale diverso da zero, sorge in molti contesti con la scelta di un opportuno campo scalare. Tuttavia le difficoltà maggiori di questi studi si hanno nel momento in cui si confrontano i valori che l'osservazione e la teoria attribuiscono al termine di energia di vuoto. Si può arrivare ad una discrepanza di oltre 120 ordini di grandezza:  $\rho_{DE}^{obs} \approx 10^{-47} GeV^4$  mentre alla scala di Planck  $\rho_{DE}^{th} \approx 10^{72} GeV^4$ .

Quindi da una parte è necessario continuare lo studio teorico per scrivere le equazioni che governano e caratterizzano  $\Lambda$ , dall'altra è importante migliorare le tecniche osservative che negli ultimi anni hanno raggiunto un elevato livello di prestazioni grazie al contributo di WMAP [24] e Planck [16].

Grazie al miglioramento di questi strumenti, infatti, è aumentata sempre più l'accuratezza nelle mappe prodotte della radiazione cosmica di fondo le quali permettono uno studio delle anisotropie e forniscono un'immagine dell'Universo primordiale, appena trecentomila anni dopo il Big Bang, dove i fotoni erano accoppiati alla materia barionica grazie allo scattering Thomson in un perfetto equilibrio termico.

In seguito l'espansione e il conseguente raffreddamento dell'Universo ha fatto sì che la radiazione si disaccoppiasse dalla materia, di conseguenza il cammino libero medio dei fotoni ha superato il raggio di Hubble permettendo loro di giungere fino a noi mantenendo inalterate le proprietà che avevano al tempo della ricombinazione.

Le fluttuazioni di energia e densità della materia primordiale rimangono così impresse nella radiazione cosmica di fondo, la quale risulta essere un mezzo fondamentale per lo studio delle prime fasi di vita del nostro Universo e la comprensione della sua evoluzione.

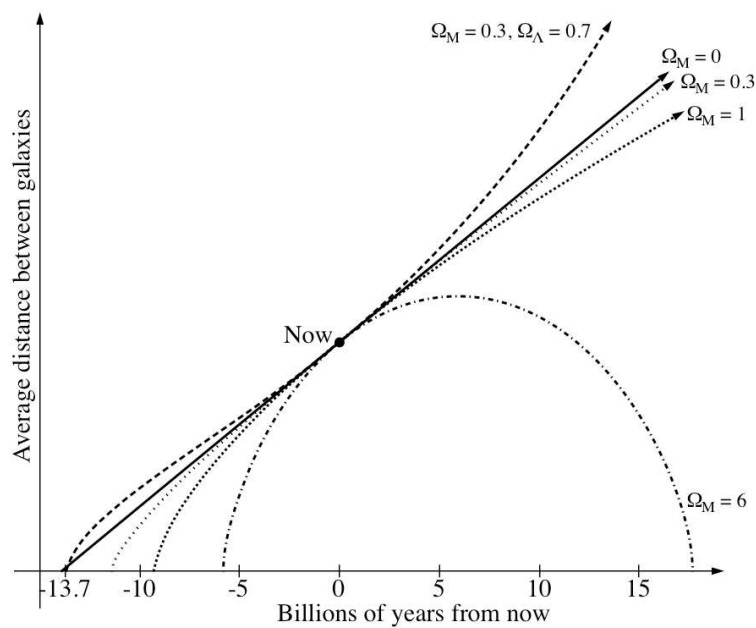


Figura 1.2: Dipendenza dell'età dell'Universo dai parametri cosmologici.





# Capitolo 2

## Teoria delle perturbazioni

L'Universo è omogeneo ed isotropo, ma un'attenta analisi mostra chiaramente che esso risponde a queste caratteristiche solo su scale molto grandi, mentre appare chiaramente disomogeneo su scale minori.

Le fluttuazioni di temperatura che osserviamo nella radiazione cosmica di fondo sono estremamente piccole, dell'ordine  $\approx 1/10^5$ .

Dal punto di vista sperimentale questo è fonte di notevoli difficoltà, ma in realtà, il fatto che si abbia a che fare con grandezze così piccole ha un vantaggio: è possibile utilizzare la teoria perturbativa e si ottengono ottimi risultati già con una semplice approssimazione lineare del problema.

### 2.1 Linearizzazione delle equazioni

Espandendo la metrica in una parte che descrive il background ed una le perturbazioni, si ottiene

$$\bar{g}_{\mu\nu}(x, t) = g_{\mu\nu}(t) + \delta g_{\mu\nu}(x, t) \quad (2.1)$$

dove  $\delta g_{\mu\nu} \ll g_{\mu\nu}$ , in modo analogo è possibile decomporre il tensore energia impulso

$$T_{\mu\nu}(x, t) = T_{\mu\nu}(t) + \delta T_{\mu\nu}(x, t) \quad (2.2)$$

con  $\delta T_{\mu\nu} \ll \rho, p$ . Questo permette alle equazioni di Einstein di essere decomposte in una parte che descrive il background omogeneo ed isotropo ed una parte che invece rappresenta le perturbazioni

$$\bar{G}_{\mu\nu} = 8\pi G \bar{T}_{\mu\nu} \Rightarrow G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad (2.3)$$

$$\delta G_{\mu\nu} = 8\pi G \delta T_{\mu\nu}. \quad (2.4)$$

Analogamente per l'equazione di conservazione del tensore di energia impulso si ha

$$\bar{T}_{\mu;\nu}^{\nu} = 0 \Rightarrow T_{\mu;\nu}^{\nu} = 0 \quad (2.5)$$

$$\delta T_{\mu;\nu}^{\nu} = 0 \quad (2.6)$$

dove il simbolo di  $;$  indica la derivata covariante.

Dato che sia  $\delta g_{\mu\nu}$  che  $\delta T_{\mu\nu}$  sono piccoli, si considerano solo perturbazioni fino al primo ordine. Le perturbazioni con cui in generale si avrà a che fare sono, dato che  $g_{\mu\nu}$  è un tensore, perturbazioni di tipo scalare (cioè di densità), di tipo vettoriale che è possibile sempre scomporre in una parte scalare (tipicamente legata al gradiente di una quantità scalare, come il gradiente di un potenziale gravitazionale) ed in una parte puramente vettoriale (campi di puro rotore).

Infine è possibile avere anche perturbazioni tensoriali responsabili di aver generato le onde gravitazionali primordiali.

## 2.2 L'equazione di Boltzmann

Le particelle con un lungo cammino libero medio, come i neutrini o i fotoni dopo la ricombinazione, sono descritti meglio dalla funzione di distribuzione a particella singola, piuttosto che da una descrizione, ad esempio, che si basa su un modello di fluido perfetto. Trattiamo perturbazioni scalari che saranno descritte tramite due quantità scalari, i potenziali, i quali si indicheranno con  $\psi(x, t)$  ed  $\phi(x, t)$ .

Poter lavorare con perturbazioni al primo ordine lascia una libertà nella scelta della Gauge (cioè del sistema di coordinate) con cui esprimere le perturbazioni, ovviamente scelte differenti della Gauge conducono ad espressioni diverse ma non cambiano la fisica.

Consideriamo pertanto la *Gauge Newtoniano Conforme*, la metrica perturbata risulta

$$\bar{g}_{00}(x, t) = -1 - 2\psi(x, t)$$

$$\text{Gauge Newtoniano} \Rightarrow \bar{g}_{0i}(x, t) = 0$$

$$\bar{g}_{ij}(x, t) = a(t)^2 \delta_{ij} [1 + 2\phi(x, t)].$$

Adottare per la seguente trattazione la Gauge Newtoniano Conforme, ha il vantaggio di avere il tensore metrico in forma diagonale, questo permette di semplificare notevolmente le equazioni delle geodetiche. Il potenziale  $\psi$ , gioca semplicemente il ruolo del potenziale gravitazionale nel limite newtoniano, mentre i due potenziali  $\phi$  e  $\psi$  differiscono tra loro quando la componente longitudinale e quella a traccia nulla, appartenente al tensore energia-impulso non sono zero.

Si tratterà il problema delle perturbazioni cosmologiche, le quali portano ad affrontare lo studio delle anisotropie della CMB, partendo dal formalismo di Boltzmann. La funzione di distribuzione, che varia con il tempo ma segue la metrica, in forma integrata risulta [20]

$$\frac{df}{dt} = C[f] \quad (2.7)$$

il termine  $C[f]$  descrive tutte le possibili collisioni, ovvero nel seguente caso le interazioni dei fotoni all'interno del plasma primordiale.

Il primo membro dell'equazione 2.7 descrive le variazioni nella funzione di distribuzione  $f$  dei fotoni non legate alle interazioni.

La funzione di distribuzione sarà quindi funzione della posizione  $x$ , del tempo  $t$  e del momento del fotone  $P^\mu$ , quindi  $f = f(x, t, P^\mu)$ , dove il momento (o quadrimpulso comobile) è definito

$$P^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \quad (2.8)$$

la  $\lambda$  è una variabile che parametrizza il percorso (geodetica) seguito dal fotone, è possibile parlare in modo indifferente di quadripulso o impulso spaziale, i fotoni infatti sono particelle prive di massa e questo ci permette di scrivere una delle componenti del momento in funzione delle altre

$$|P^2| = 0 \equiv g_{\mu\nu}P^\mu P^\nu = g_{00}P^0 P^0 + g_{ij}P^i P^j = -(1 + 2\psi)(P^0)^2 + p^2$$

nell'ultima uguaglianza è stata sviluppata al primo ordine la radice del denominatore, è possibile quindi eliminare tutti i termini nell'equazione di Boltzmann  $P^0$  e le sue derivate, ed usare solo  $p$ . Chiaramente va espressa la dipendenza non solo dall'ampiezza del momento ma anche dalla sua direzione  $\hat{p}^i$ , considerato come versore di norma unitaria. La derivata totale risulta quindi scritta come

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \hat{p}^i} \frac{\partial \hat{p}^i}{\partial t}. \quad (2.9)$$

Tutta la trattazione si basa considerando i termini al primo ordine, già in questa espressione ci sono termini di ordine superiore al primo e che pertanto potrebbero essere scartati immediatamente, ad esempio l'ultimo termine. Infatti all'ordine zero, quello non perturbato, la funzione di distribuzione  $f$  non dipende dalla direzione del momento del fotone ma solo dalla sua ampiezza.

Pertanto, la derivata parziale nell'ultimo termine della 2.9 rappresenta un termine del primo ordine, ma d'altro canto anche il termine moltiplicato ad esso è del primo ordine, in quanto solo in presenza di una metrica perturbata, con potenziali  $\psi$  ed  $\phi$  (ad esempio la presenza di un campo gravitazionale), i fotoni deviano dalla loro direzione.

Quindi tutto questo termine è del secondo ordine e può di conseguenza essere scartato nella presente trattazione. Consideriamo quindi gli altri termini, la quantità  $dx^i/dt$  è possibile esprimerla facendo uso della definizione del quadri-momento

$$P^i \equiv \frac{dx^i}{d\lambda} \quad P^0 \equiv \frac{dt}{d\lambda} \quad (2.10)$$

da cui

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dt} = \frac{P^i}{P^0}.$$

Volendo esprimere questa quantità in termini delle variabili  $p$  e  $\hat{p}^i$ , è possibile utilizzare le relazioni

$$P^0 = p(1 - \psi) \quad \text{ed analogamente} \quad P^i = C\hat{p}^i \quad (2.11)$$

dove  $C$  indica la costante da determinare, dalla definizione di  $p$  si ha

$$p^2 = g_{ij}P^iP^j = g_{ij}\hat{p}^i\hat{p}^jC^2 = a^2(t)(1 + 2\phi)\delta_{ij}\hat{p}^i\hat{p}^jC^2 = a^2(t)(1 + 2\phi)C^2$$

avendo utilizzato l'espressione per la parte spaziale della metrica perturbata, oltre al fatto che  $\hat{p}^i$  è un versore. Quindi la costante  $C$  risulta essere uguale a

$$P^i = \frac{p\hat{p}^i}{a\sqrt{1 + 2\phi}} = p\hat{p}^i \frac{1 - \phi}{a}. \quad (2.12)$$

A questo punto è possibile esprimere il termine cercato

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{P^i}{P^0} = \frac{p\hat{p}^i(1 - \phi)}{a} \frac{1}{p(1 - \psi)} = \frac{\hat{p}^i}{a}(1 - \phi + \psi) \quad (2.13)$$

naturalmente anche qui si è considerato solo il termine al primo ordine, il significato di questa equazione risiede nella descrizione di come un fotone devia dalla sua direzione a causa della presenza di termini perturbativi. Infatti in una sovra-densità dove  $\phi \geq 0$  e  $\psi \leq 0$  la quantità  $(1 - \phi + \psi) \leq 1$ , pertanto i fotoni rallentano quando attraversano questa regione.

Questo termine moltiplica la derivata parziale della funzione di distribuzione rispetto a  $x^i$  che però è del primo ordine, infatti all'ordine zero la  $f$  non dipende dalla posizione del fotone. Quindi è possibile trascurare i termini  $\phi$  e  $\psi$  nell'ultima espressione.

Ora si possono inserire questi risultati nell'espressione 2.9 ottenendo

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i}{a} \frac{\partial f}{\partial x^i} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{dp}{dt}. \quad (2.14)$$

Rimane da calcolare l'ultimo termine  $dp/dt$ , per farlo si utilizza l'equazione della geodetica che scritta per evidenziare il quadri-momento ha la forma

$$\frac{dP^0}{d\lambda} = -\Gamma_{\alpha\beta}^0 P^\alpha P^\beta$$

è bene precisare che  $\Gamma$  non è un tensore. Riscrivendo la derivata rispetto a  $\lambda$  e rispetto al tempo  $t$  si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{dP^0}{dt} \frac{dt}{d\lambda} &= -\Gamma_{\alpha\beta}^0 P^\alpha P^\beta \\ \frac{dP^0}{dt} &= \Gamma_{\alpha\beta}^0 \frac{P^\alpha P^\beta}{P^0} \\ \frac{d}{dt} [p(1 - \psi)] &= -\Gamma_{\alpha\beta}^0 \frac{P^\alpha P^\beta}{p} (1 + \psi) \end{aligned}$$

dove è stato espresso  $P^0$  in termini di  $p$  e delle perturbazioni  $\psi$ , avendo sviluppato sempre il tutto al primo ordine. Esplicitando la derivata rispetto al tempo

$$\frac{dp}{dt} (1 - \psi) = p \frac{\partial \psi}{\partial t} - \Gamma_{\alpha\beta}^0 \frac{P^\alpha P^\beta}{p} (1 + \psi). \quad (2.15)$$

Adesso rimane solo da valutare il termine  $-\Gamma_{\alpha\beta}^0 P^\alpha P^\beta$  ed è possibile farlo grazie ai simboli di Christoffel

$$-\Gamma_{\alpha\beta}^0 \frac{P^\alpha P^\beta}{p} = \frac{g^{0\nu}}{2} (\partial_\beta g_{\nu\alpha} + \partial_\alpha g_{\beta\nu} - \partial_t g_{\alpha\beta}) \frac{P^\alpha P^\beta}{p}$$

da cui

$$\Gamma_{\alpha\beta}^0 \frac{P^\alpha P^\beta}{p} = \frac{g^{00}}{2} (2\partial_\beta g_{0\alpha} - \partial_t g_{\alpha\beta}) \frac{P^\alpha P^\beta}{p} = \frac{1-2\psi}{2} (2\partial_\beta g_{0\alpha} - \partial_t g_{\alpha\beta}) \frac{P^\alpha P^\beta}{p}$$

dove  $g_{0\alpha}$  è non nullo solo se  $\alpha = 0$  e pertanto  $\partial_\beta g_{0\alpha} = -2\partial_\beta \psi$ .

Analizzando quindi l'ultimo termine si ha

$$\begin{aligned} -\partial_t g_{\alpha\beta} \frac{P^\alpha P^\beta}{p} &= -\partial_t g_{00} \frac{P^0 P^0}{p} - \partial_t g_{ij} \frac{P^i P^j}{p} \\ &= 2p\partial_t \psi - \partial_t g_{ij} \frac{P^i P^j}{p} \end{aligned}$$

dove  $P^0$  è espresso in termini di  $p$  e  $\psi$ , considerando sempre una trattazione al primo ordine. Tenendo conto che

$$g_{ij} = a^2(t)(1 + 2\phi)\delta_{ij} \quad (2.16)$$

derivando questa espressione si ottiene

$$\begin{aligned} \partial_t g_{ij} &= \delta_{ij} (2a\dot{a} + 4a\dot{a}\phi + 2a^2\dot{\phi}) \\ &= a^2(t)\delta_{ij} [2H(1 + 2\phi) + 2\partial_t \phi]. \end{aligned}$$

Ma d'altro canto

$$\partial_{ij} \frac{P^i P^j}{p} = \partial_{ij} p^2 \frac{1-2\phi}{a^2 p} \tilde{p}^i \tilde{p}^j = p \frac{1-2\phi}{a^2}. \quad (2.17)$$

A questo punto è possibile sostituire nell'espressione  $\Gamma_{\alpha\beta}^0$ , ed ottenere

$$\Gamma_{\alpha\beta}^0 \frac{P^\alpha P^\beta}{p} = \frac{-1 + 2\psi}{2} \left[ -4\partial_\beta \psi \frac{P^0 P^\beta}{p} + 2p\partial_t \psi - a^2 \frac{p(1-2\phi)}{a^2} (2\partial_t \phi + 2H(1+2\phi)) \right]$$

andando ad esplicitare la derivata  $\partial_\beta$ , espandendo al primo ordine  $P^0 P^\beta/p$  e considerando solo il termine di ordine zero, il quale si ottiene dal prodotto tra i termini  $(1-2\phi)(1+2\phi)$ ,

si trova che

$$\begin{aligned}\Gamma_{\alpha\beta}^0 \frac{P^\alpha P^\beta}{p} &= \frac{-1 + 2\psi}{2} \left[ -4 \left( p \partial_t \psi + \frac{\partial \psi}{\partial x^i} \frac{p \hat{p}^i}{a} \right) + 2p \partial_t \psi - p (2\partial_t \psi + 2H) \right] \\ &= (-1 + 2\psi) \left[ -p \partial_t \psi - 2\partial \psi \frac{p \hat{p}^i}{a} - p (\partial_t \psi + H) \right].\end{aligned}$$

Adesso si hanno tutti i termini, quindi possono essere messi insieme per ottenere

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dt} &= p \frac{d\psi}{dt} - \Gamma_{\alpha\beta}^0 \frac{P^\alpha P^\beta}{p} (1 + \psi) \\ &= p \left[ \partial_t \psi + \frac{\hat{p}^i}{a} \partial_i \psi \right] \frac{P^\alpha P^\beta}{p} (1 + \psi) \\ &= p \left[ \partial_t \psi + \frac{\hat{p}^i}{a} \partial_i \psi \right] - p \partial_t \psi - 2\partial_i \psi \frac{p \hat{p}^i}{a} - p (\partial_t \psi + H).\end{aligned}$$

Il tutto sviluppato al primo ordine può essere compattato, questo conduce all'equazione

$$\frac{1}{p} \frac{dp}{dt} = -H - \partial_t \phi - \frac{\hat{p}^i}{a} \partial_i \psi. \quad (2.18)$$

Questa equazione descrive la variazione del momento dei fotoni nell'attimo in cui questi si trovano ad attraversare una regione descritta da una metrica perturbata.

Il termine con  $H$  descrive la perdita di momento per effetto dell'espansione dell'Universo (flusso di Hubble).

Come già osservato una regione di sovradensità sarà data da  $\psi \leq 0$  e  $\phi \geq 0$ , dove si ha che il secondo termine dell'equazione 2.18 rappresenta la perdita del momento quando il fotone si trova all'interno di una buca di potenziale che si fa sempre più profonda ( $\partial_t \geq 0$ ): diviene sempre più difficile uscire dalla buca all'aumentare della sua profondità, serve cioè un'energia maggiore da parte della particella.

L'ultimo termine  $\hat{p}^i \partial_i \psi \leq 0$  riguarda un fotone il quale, entrando in una buca di potenziale guadagna momento (viene accelerato verso il centro) mentre di conseguenza lo perde quando ne esce.

Pertanto la parte sinistra dell'equazione di Boltzmann diventa

$$\frac{df}{dt} = \partial_t f + \frac{\hat{p}^i}{a} \partial_i f - p \partial_p f \left( H + \partial_t \phi + \frac{\hat{p}^i}{a} \partial_i \psi \right). \quad (2.19)$$

I primi due termini conducono alle equazioni di continuità ed a quella di Eulero. Il terzo termine ci dice che un fotone perde energia in un Universo FRW, mentre gli ultimi due descrivono in che modo reagisce una distribuzione di fotoni all'evolvere delle sovra/sotto densità. Ora è necessario espandere, la funzione di distribuzione per i fotoni sempre al primo ordine.

All'ordine zero questa è la distribuzione di Bose-Einstein, mentre è possibile scrivere l'espressione più generale come

$$f(\bar{x}, p, \hat{p}, t) = \left[ \exp \left\{ \frac{p}{T(t) [1 + \Theta(\bar{x}, \hat{p}, t)]} \right\} - 1 \right]^{-1} \quad (2.20)$$

indicata la perturbazione della temperatura come  $\Theta(\bar{x}, \hat{p}, t) = \delta T/T$  (o della brillantezza). In un Universo omogeneo ed isotropo la temperatura  $T$  dei fotoni dipende unicamente dal tempo, pertanto la perturbazione al primo ordine dipenderà dalla posizione (che porta a disomogeneità) e dalla direzione  $\hat{p}$  del momento (che porta invece ad anisotropie). Non si è assunta una dipendenza dall'ampiezza del momento e questo viene giustificato dal fatto che, lo scattering Compton è molto efficiente e lascia praticamente inalterato il momento del fotone dopo lo scattering con l'elettrone. Infatti il fotone, è qui descritto come una particella relativistica mentre lo scattering è di bassa energia rispetto alla massa a riposo dell'elettrone con cui il fotone scatterà.

Tutta questa trattazione riguarda la rappresentazione del comportamento delle particelle dopo la nucleosintesi fino all'era della ricombinazione.

Dato che  $\Theta$  è piccolo possiamo espandere al primo ordine questa espressione ed ottenere

$$f(\bar{x}, p, \hat{p}, t) = \frac{1}{\exp(p/T) - 1} + \left( \frac{\partial}{\partial T} [\exp(p/T) - 1]^{-1} \right) T\Theta = f^{(0)} - p \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p} \Theta$$

dove  $f^{(0)} = [\exp(p/T) - 1]^{-1}$  indica l'ordine zero, ovvero imperturbato, avendo utilizzato la proprietà di Bose-Einstein (dove qui  $p = h\nu$ )

$$T \frac{\partial f^{(0)}}{\partial T} = -p \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p}. \quad (2.21)$$



### 2.2.1 L'equazione all'ordine zero

Andando a considerare solo i termini di ordine zero, ovvero senza perturbazioni quindi con  $\phi, \psi$  e  $\Theta$  sono nulli. In questo caso l'equazione di Boltzmann è funzione del tempo e dell'impulso e sarà data da

$$\frac{df^{(0)}}{dt} = \frac{\partial f^{(0)}}{\partial t} - pH \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p} = 0 \quad (2.22)$$

dove è stato posto uguale a zero il membro di destra. L'equazione è non collisionale (equazione di Liouville), ma come si vedrà quando sarà calcolato il termine di scattering, il membro di destra è del primo ordine.

In effetti se pensiamo all'efficienza dello scattering Compton, il plasma primordiale essendo in equilibrio termico fa sì che tutte le reazioni che vanno in un senso sono completamente bilanciate da quelle nella direzione opposta durante uno scattering.

Quando si va a perturbare il sistema questo non sarà vero e verrà favorito il rate di reazioni in un verso rispetto all'altro.

Riscrivendo la derivata parziale rispetto a  $t$  come derivata rispetto alla temperatura  $T$  si ottiene

$$\frac{df^{(0)}}{dt} = \frac{df^{(0)}}{dT} \frac{dT}{dt} = -\frac{dT/dt}{T} p \frac{df^{(0)}}{dp} \quad (2.23)$$

dove nell'ultima uguaglianza è stata semplicemente trasformata la derivata rispetto a  $T$  in una rispetto a  $p$  sfruttando la proprietà vista precedentemente. A questo punto è possibile raccogliere i termini delle derivate rispetto a  $p$  e si ha

$$p \frac{df^{(0)}}{dp} \left[ \frac{-dT/dt}{T} - \frac{da/dt}{a} \right] = 0 \quad (2.24)$$

dove è stato esplicitato  $H$ , la soluzione di questa equazione implica che

$$\frac{dT}{T} = -\frac{da}{a} \Rightarrow T \propto a^{-1}. \quad (2.25)$$

L'effetto dell'espansione è quindi quello di riscaldare la temperatura inversamente al fattore di scala.

Un risultato che già si conosceva, infatti sapendo che  $\rho_\gamma \propto a^{-4}$  si trovava la stessa espressione finale sfruttando la relazione di Stefan-Boltzmann  $\rho_\gamma \propto T^4$ .

### 2.2.2 L'equazione al primo ordine

Valutiamo ora l'espressione al primo ordine usando il risultato precedente dell'ordine zero. Quello che si ottiene è

$$\frac{df^{(1)}}{dt} = -p \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p} \Theta \right] - p \frac{\hat{p}^i}{a} \frac{\partial \Theta}{\partial x^i} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p} + H p \Theta \frac{\partial}{\partial p} \left[ p \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p} \right] - p \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i}{a} \frac{\partial \psi}{\partial x^i} \right].$$

Sviluppando il primo termine nel membro di destra e scambiando  $\partial/\partial t$  con  $\partial/\partial T$

$$\begin{aligned} -p \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p} \Theta \right] &= -p \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p} \frac{\partial \Theta}{\partial t} - p \Theta \frac{\partial^2 f^{(0)}}{\partial p \partial t} \\ &= -p \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p} \frac{\partial \Theta}{\partial t} - p \Theta \frac{dT}{dt} \frac{\partial^2 f^{(0)}}{\partial p \partial t} \\ &= -p \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p} \frac{\partial \Theta}{\partial t} + p \Theta \frac{dT/dt}{T} \frac{\partial}{\partial p} \left[ p \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p} \right] \end{aligned}$$

ma  $dT/dt/T$  nell'ultima espressione non è altro che  $H$ , quindi questo termine si cancella con il terzo dell'equazione prima e il tutto conduce all'equazione al primo ordine

$$\frac{df^{(1)}}{dt} = -p \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p} \left[ \frac{\partial \Theta}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i}{a} \frac{\partial \Theta}{\partial x^i} + \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i}{a} \frac{\partial \psi}{\partial x^i} \right].$$

I primi due termini causano il *free streaming* cioè l'effetto di propagazione delle anisotropie (così chiamate per la esplicita dipendenza dalla direzione oltre che dalla posizione) fino alle piccole scale, mentre gli ultimi due termini tengono conto dell'effetto della gravità.

### 2.2.3 I termine di collisione $C[f]$ per i fotoni

Analizzando ora il membro di destra dell'equazione di Boltzmann, dove l'interazione principale tra fotoni ed elettroni è quella dovuta allo scattering di Compton, si considerano le energie in gioco. Il valore, ad oggi, della temperatura del fondo cosmico, misurato ad esempio dallo strumento FIRAS a bordo del satellite COBE, è di  $T_0 = 2.725 \pm 0.002 K$ , che in termini energetici equivale alla quantità  $0.25 \times 10^{-3} eV$ .

Un importante risultato ottenuto è la dipendenza della temperatura dal fattore di scala  $T \propto a^{-1}$ , poichè la ricombinazione avviene ad un redshift con  $z_{eq} \approx 1100$  che equivale ad  $a \approx 10^{-3}$ , si ottiene una temperatura per la ricombinazione di  $\approx 3000 K$ .

Quindi la fisica in gioco non coinvolge energie molto elevate, ed inoltre anche l'agitazione termica di protoni ed elettroni è di gran lunga inferiore alla loro massa. Consideriamo adesso l'interazioni dovuto allo scattering Compton tra fotoni ed elettroni i quali a loro volta sono legati ai protoni, ed altri nuclei atomici, da interazioni di Coulomb.

Si vuole valutare come cambia la funzione di distribuzione  $f$  dei fotoni di momento  $\bar{p}$  a causa proprio dell'effetto Compton. La reazione in esame all'equilibrio è

$$e^-(q^\mu) + \gamma(p^\mu) \Leftrightarrow e^-(q'^\mu) + \gamma(p'^\mu) \quad (2.26)$$

dove un certo numero di  $e^-$  e di  $\gamma$  daranno fotoni di momento  $p^\mu$  facendo quindi variare (aumentare) la funzione di distribuzione  $f$ , nello stesso tempo un certo numero di coppie genereranno fotoni di momento  $p'^\mu$  (diminuendo  $f$ ). Il termine sorgente può essere scritto nel seguente modo

$$C[f(p)] = \sum_{q^\mu, q'^\mu, p'^\mu} |M|^2 \left[ f_e(q'^\mu) f(p'^\mu) - f_e(q^\mu) f(p^\mu) \right] \quad (2.27)$$

il primo prodotto tra parentesi descrive la produzione di fotoni di momento  $p^\mu$ , mentre il secondo descrive la diminuzione degli stessi che vanno a produrre fotoni di momento  $p'^\mu$ , inoltre con  $f_e$  si indica la funzione di distribuzione degli elettroni.

Il termine  $|M|^2$  indica l'ampiezza dello scattering di Compton (è del tutto trascurata l'emissione stimolata).

In maniera più dettagliata si deve riscrivere la sommatoria come integrali sui momenti, quindi

$$\begin{aligned} C[f(p)] &= \frac{1}{p} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2E_e(q)} \int \frac{d^3q'}{(2\pi)^3 2E_e(q')} \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3 2E_e(p')} \times \\ &|M|^2 (2\pi)^4 \delta^3[\bar{p} + \bar{q} - \bar{p}' - \bar{q}'] \delta[E(p) + E_e(q) - E(p') - E_e(q')] \times \\ &[f_e(q') f(p') - f_e(q) f(p)] \end{aligned}$$

dove la  $\delta^3$  esprime la conservazione del momento. Poiché la temperatura è bassa siamo in un regime non-relativistico per gli elettroni i quali hanno quindi un'energia equivalente a  $E_e(q) = m_e + p^2/2m_e$ , mentre per i fotoni  $E(p) = p$ .

Con queste condizioni, l'energia cinetica degli elettroni è piccola se confrontata con la loro massa a riposo per cui:  $E_q \approx m_e$ .

Tutto questo permette di sostituire la quantità  $E_e$  al denominatore a favore di  $m_e$ , è possibile usare la  $\delta$  del momento per eliminare l'integrale in  $q'$  che quindi è possibile riscrivere in termini di  $q, p$  e  $p'$

$$C[f(p)] = \frac{\pi}{4m_e^2 p} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3 p'} \delta \left[ p + \frac{q^2}{2m_e} - p' - \frac{(\bar{q} + \bar{p} - \bar{p}')^2}{2m_e} \right] \times \\ |M|^2 \left[ f_e(q + p + p') f(p') - f_e(q) f(p) \right].$$

Facendo delle considerazioni di tipo cinematico circa l'effetto Compton non-relativistico, il trasferimento di energia è molto piccolo e questo implica che  $p \approx p'$  e  $q \gg p, p'$ . Si valuti la variazione di energia per gli elettroni nello scattering

$$E_e(\bar{q}) - E_e(\bar{q} + \bar{p} - \bar{p}') = \frac{q^2}{2m_e} - \frac{(\bar{q} + \bar{p} - \bar{p}')^2}{2m_e} \\ = \frac{q^2}{2m_e} - \frac{q^2}{2m_e} - \frac{(\bar{p} - \bar{p}')^2}{2m_e} + \frac{(\bar{p}' - \bar{p})\bar{q}}{m_e}$$

dove è stato sviluppato il quadrato, questo porta ad elidere i primi due termini. Anche il terzo termine non è da considerare in quanto  $p \approx p'$  e sarebbe quindi un termine del secondo ordine. Quindi anche la variazione di energia degli elettroni è molto piccola. All'ordine zero  $q = q'$ , dove  $E_e(q) = E_e(q')$ , è possibile cioè espandere al primo ordine in  $q^2/2m_e$  la  $\delta$

$$\delta \left[ p + \frac{q^2}{2m_e} - p' - \frac{(\bar{q} + \bar{p} - \bar{p}')^2}{2m_e} \right] \approx \delta(p - p') + \frac{(\bar{p}' - \bar{p})\bar{q}}{m_e} \times \\ \frac{\partial}{\partial E_e(q')} \delta \left[ p + E_e(q) - p' - E_e(q') \right] \\ \approx \delta(p - p') + \frac{(\bar{p}' - \bar{p})\bar{q}}{m_e} \frac{\partial \delta(p - p')}{\partial p'}.$$

Si può considerare l'approssimazione di  $E_e(q) \approx E_e(q')$ , sfruttando quindi il fatto che  $\partial f(x - y)/\partial x = -\partial f(x - y)/\partial y$  e notando che  $f_e(\bar{p} + \bar{q} - \bar{p}') \approx f_e(\bar{q})$ .

Questo permette di ottenere l'espressione

$$C[f(p)] = \frac{\pi}{4m_e^2 p} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} f_e(q) \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3 p'} |M|^2 \delta \times \left[ \delta(p - p') + \frac{(\bar{p}' - \bar{p})\bar{q}}{m_e} \frac{\partial \delta(p - p')}{\partial p'} \right] [f(p) - f(p')].$$

La derivata della  $\delta$  potrà essere integrata per parti. A questo punto è possibile definire l'ampiezza dello scattering di Compton, esso presenta una dipendenza angolare dall'angolo  $\vartheta$  tra la direzione del fotone prima dello scattering con l'elettrone e la direzione del fotone dopo l'urto. Ma è possibile anche definire l'ampiezza tramite la sezione d'urto Thomson come

$$|M|^2 = 8\pi\sigma_T m_e^2 \quad (2.28)$$

dove non è considerata nessuna dipendenza angolare, nel caso in cui si tratti il caso della dipendenza dalla sola temperatura, questa scelta per l'ampiezza dello scattering può condurre ad un errore dell'ordine massimo del  $\approx 1\%$  (ma in una trattazione più accurata la CMB è debolmente polarizzata). Sostituendo e manipolando l'espressione precedente si ottiene

$$C[f(p)] = \frac{2\pi^2 n_e \sigma_T}{p} \left( \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} f_e(q) \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3 p'} \delta(p - p') [f(p) - f(p')] + \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} f_e(q) \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3 p'} \frac{(\bar{p}' - \bar{p})\bar{q}}{m_e} \frac{\partial \delta(p - p')}{\partial p'} [f(p') - f(p)] \right).$$

Ricordando che l'integrale sul momento di  $f_e(q)$  fornisce esattamente il numero di elettroni  $n_e$ , mentre l'integrale sul momento di  $f_e(q)q$  permette di calcolare  $n_e v_b$  dove  $v_b$  la velocità dei barioni con cui gli elettroni sono strettamente legati tramite le interazioni, si può svolgere l'integrali in  $d^3 q$  ottenendo

$$C[f(p)] = \frac{2\pi^2 n_e \sigma_T}{p} \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3 p'} \left( \delta(p - p') + (\bar{p} - \bar{p}') \cdot v_b \frac{\partial \delta(p - p')}{\partial p'} \right) \times \left( f^{(0)}(p') - f^{(0)}(p) - p' \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p'} \Theta(\hat{p}') + p \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p} \Theta(\hat{p}) \right)$$

dove il tutto è stato sviluppato sempre al primo ordine per funzioni di distribuzione dei fotoni. A questo punto per risolvere l'integrale passiamo in coordinate polari integrando quindi in  $dp'$  ed in  $d\Omega'$ , cioè nell'angolo solido intorno alla direzione individuata dal vettore  $\vec{p}'$ .

Questo fornisce

$$C[f(p)] = \frac{n_e \sigma_T}{4\pi p} \int dp' p' \int d\Omega' \times \delta(p - p') \left( -p' \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p'} \Theta(\hat{p}') + p \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p} \Theta(\hat{p}) \right) +$$

$$(\bar{p} - \vec{p}') \cdot v_b \frac{\partial \delta(p - p')}{\partial p'} \left( f^{(0)}(p') - f^{(0)}(p) \right)$$

il termine al primo ordine della funzione di distribuzione può moltiplicare solo la  $\delta$  altrimenti darebbe luogo ad un termine del secondo ordine.

Sono solo due termini che dipendono da  $\hat{p}'$  di cui occorre tener conto quando si integra su la  $d\Omega' \Theta(\hat{p}')$  e il termine  $\hat{p}' \cdot v_b$ . Poiché  $v_b$  è un vettore costante, quando viene integrato fornisce zero.

Per il primo si introduce la quantità

$$\Theta_0(\bar{x}, t) \equiv \frac{1}{4\pi} \int d\Omega' \Theta(\bar{x}, \hat{p}', t) \quad (2.29)$$

il quale è indipendente dalla direzione del momento: è detto *monopolo*, osservatori differenti avranno monopoli diversi, quindi integrando su  $d\Omega'$  si ottiene

$$C[f(p)] = \frac{n_e \sigma_T}{p} \int dp' p' \times \delta(p - p') \left( -p \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p'} \Theta_0 + p \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p} \Theta(\hat{p}) \right) +$$

$$\bar{p} \cdot \bar{v}_b \frac{\partial \delta(p - p')}{\partial p'} \left( f^{(0)}(p') - f^{(0)}(p) \right)$$

il primo integrale si risolve sfruttando la  $\delta$ , mentre il secondo si risolve integrando per parti la  $\delta$ . In conclusione si ottiene

$$C[f(p)] = -p \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p} n_e \sigma_T [\Theta_0 - \Theta(\hat{p}) + \hat{p} \cdot v_b] \quad (2.30)$$

Quindi non ci sono termini di ordine zero: l'efficienza dello scattering Compton è molto alta, inoltre in assenza di una velocità peculiare degli elettroni, l'effetto dello scattering è quello di riportare qualunque perturbazione al valore del monopolo (il cielo di un

dato osservatore appare uniforme, ma osservatori differenti rilevano temperature diverse e questo è dovuto al fatto che il monopolio dipende da  $\bar{x}$ ).

Tuttavia in presenza di una velocità per i barioni, il termine  $v_b \cdot \hat{p}$  introduce per i fotoni una componente dipolare che sarà direttamente legata ad un termine Doppler, cioè si avrà una temperatura per la radiazione più calda nella direzione di moto degli elettroni e più fredda in quella opposta.

Questi sono i due termini che dominano la radiazione cosmica di fondo quando i fotoni interagiscono con gli elettroni e questo avviene entro l'orizzonte causale. Tutti i multi-poli di ordine superiore sono fortemente soppressi.

A questo punto è possibile scrivere l'espressione completa per l'equazione di Boltzmann per i fotoni al primo ordine

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i}{a} \frac{\partial \Theta}{\partial x^i} + \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} = n_e \sigma_T [\Theta_0 - \Theta + \hat{p} \cdot v_b]. \quad (2.31)$$

Questa espressione può essere riscritta utilizzando il tempo conforme come variabile temporale  $d\eta = dt/a$ . Questo fa comparire il fattore  $a$  al denominatore nelle derivate temporali, si ottiene

$$\dot{\Theta} + p^i \partial_i \Theta + \dot{\Phi} + p^i \partial_i \Psi = n_e \sigma_T [\Theta_0 - \Theta + \hat{p} \cdot v_b]. \quad (2.32)$$

Si hanno equazioni differenziali alle derivate parziali che legano  $\Theta$  ad  $\Phi, \Psi$  e  $v_b$ . Se si considera la trasformata di Fourier, si ottiene un sistema di equazioni alle derivate ordinarie.

Inoltre, poichè le perturbazioni sono piccole, i singoli modi evolvono indipendentemente, pertanto è possibile risolvere ogni modo indipendentemente.

Si definiscono i modi di Fourier come

$$\Theta(x) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{ikx} \Theta(k) \quad (2.33)$$

i modi sono caratterizzati dall'ampiezza del vettore d'onda  $k \equiv \sqrt{k^i k_i}$ , definendo il coseno dell'angolo tra la direzione di propagazione del fotone  $\hat{p}$  e il numero d'onda  $\bar{k}$  come  $\mu \equiv \bar{k} \cdot p/k$ .

Il vettore d'onda è nella direzione di cambiamento della temperatura:

se  $\mu = 1$  il fotone si muove nella direzione di massimo cambiamento di T,

se  $\mu = 0$  il fotone viaggia attraverso regioni con temperatura costante.

Assumendo che la velocità sia irrotazionale  $v_b \cdot \hat{p}$  e definendo la profondità ottica (inverso del cammino libero medio)

$$\tau(\eta) \equiv \int_{\eta}^{\eta_0} d\eta' n_e \sigma_T a \quad (2.34)$$

$$\dot{\tau} \equiv \frac{d\tau}{d\eta} = -n_e \sigma_T a. \quad (2.35)$$

Per cui prendendo la trasformata di Fourier dell'equazione di Boltzmann si ottiene in conclusione

$$\dot{\Theta} + ik\mu\Theta + \dot{\Phi} + ik\mu\Psi = -\dot{\tau}(\Theta_0 - \Theta + \mu v_b). \quad (2.36)$$

## 2.3 Equazioni per le altre specie di particelle

In linea di principio la stessa trattazione fatta per i fotoni è estendibile a tutte le altre specie di particelle come barioni, neutrini, materia oscura e quindi è possibile derivare per ognuna di esse le equazioni di Boltzmann corrispondenti.

### 2.3.1 Equazione di Boltzmann per la CDM

In questo caso le particelle sono massive, quindi l'energia e l'impulso non sono uguali ma va tenuto conto della massa a riposo delle particelle. Il termine di Liouville ha un constrain diverso

$$g_{\mu\nu} P^\mu P^\nu = -m^2.$$

Trascura il termine di tipo collisionale, queste particelle non interagiscono con il fluido cosmico a tutte le epoche. In questo caso si sceglie l'energia come variabile indipendente, mentre

$$P^\mu = \left[ (1 - \Psi), p\hat{p}^i \frac{1 - \Phi}{a} \right]. \quad (2.37)$$

La procedura seguita per la Cold Dark Matter (CDM) è la stessa di quella dei fotoni fatta eccezione per il constrain  $-m^2$  appartenente al termine di Liouville.



Quindi l'equazione per la CDM assume la forma

$$\frac{df_{dm}}{dt} = \frac{\partial f_{dm}}{\partial t} + \frac{\partial f_{dm}}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} + \frac{\partial f_{dm}}{\partial E} \frac{dE}{dt} + \frac{\partial f_{dm}}{\partial \hat{p}^i} \frac{\hat{p}^i}{dt}$$

L'interesse è qui rivolto al caso "Cold" dove è possibile considerare le particelle non relativistiche a tutte le epoche (salvo epoche primordiali che eludono da questa trattazione), così le velocità peculiari sono assunte essere piccole rispetto al caso Hot Dark Matter.

Esplicitando i termini dell'equazione precedente

$$\frac{\partial f_{dm}}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i}{a} \frac{p}{E} \frac{\partial f_{dm}}{\partial x^i} - \frac{\partial f_{dm}}{\partial E} \left[ H(t) \frac{p^2}{E} + \frac{p^2}{E} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{p \hat{p}^i}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} \right] = 0.$$

Lavorando sui momenti della funzione di distribuzione, tenendo conto che  $p/m \approx v$  vanno tenuti sino al primo ordine, si moltiplica il tutto per l'elemento di volume nello spazio delle fasi e si integra

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} f_{dm} + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial x^i} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} f_{dm} \frac{p \hat{p}^i}{E} - \left[ H(t) + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right] \times \\ & \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{\partial f_{dm}}{\partial E} \frac{p^2}{E} - \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{\partial f_{dm}}{\partial E} p \hat{p}^i = 0. \end{aligned}$$

L'ultimo termine è del secondo ordine (a causa dell'integrale sulla direzione dell'impulso). Dalla definizione dei momenti si ha la densità numerica delle particelle

$$n_{dm} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} f_{dm}$$

e la velocità del fluido

$$v^i = \frac{1}{n_{dm}} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} f_{dm} \frac{p \hat{p}^i}{E}$$

mentre il terzo va integrato per parti

$$\int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{\partial f_{dm}}{\partial p} = \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dp p^3 \frac{\partial f_{dm}}{\partial p} = -3 \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dp p^2 f_{dm} = -3n_{dm}.$$

L'equazione di continuità per la Dark Matter sarà data da

$$\frac{\partial n_{dm}}{\partial t} + \frac{1}{a} \frac{\partial (n_{dm} v^i)}{\partial x^i} + 3 \left[ H(t) + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right] n_{dm} = 0 \quad (2.38)$$

l'ordine zero è

$$\frac{\partial n_{dm}^{(0)}}{\partial t} + 3 \frac{da/dt}{a} n_{dm}^{(0)} = 0 \quad (2.39)$$

ovvero con un andamento proporzionale ad

$$\frac{d \left( n_{dm}^{(0)} a^3 \right)}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad n_{dm}^{(0)} \propto a^{-3}.$$

Quest'ultima espressione mostra come, all'ordine zero, la densità della Dark Matter scala come l'inverso del fattore di scala al cubo. Per andare a studiare il termine al primo ordine va definito nuovamente il contrasto di densità

$$n_{dm} = n_{dm}^{(0)} [1 + \delta(\bar{x}, t)] \quad (2.40)$$

quindi si otterrà l'espressione al primo ordine

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{1}{a} \frac{\partial v^i}{\partial x^i} + 3 \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0. \quad (2.41)$$

Da notare come il momento di ordine zero (la densità) sia accoppiato a quello di ordine uno (la velocità), naturalmente questa è una proprietà generale delle forme integrali dell'equazione di Boltzmann. Infatti per ottenere l'altra equazione bisogna moltiplicare per il termine  $d^3 p (p/E) \hat{p}^j / (2\pi)^3$  ed integrare, si avrà

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} f_{dm} \frac{p \hat{p}^j}{E} + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial x^i} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} f_{dm} \frac{p^2 \hat{p}^i \hat{p}^j}{E^2} - \left[ H(t) + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right] \times \\ & \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{\partial f_{dm}}{\partial E} \frac{p^3 \hat{p}^j}{E^2} - \frac{1}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{\partial f_{dm}}{\partial E} \frac{p \hat{p}^i \hat{p}^j}{E} = 0 \end{aligned}$$

il secondo termine corrisponde a fluttuazione del secondo ordine della velocità del fluido e per questo lo si può eliminare da questa trattazione, il terzo termine necessita di essere integrato per parti.

Quindi il primo momento dell'equazione di Boltzmann per la Cold Dark Matter sarà

$$\frac{\partial (n_{dm} v^j)}{\partial t} + 4 \frac{\dot{a}}{a} n_{dm} v^j + \frac{n_{dm}}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} = 0 \quad (2.42)$$

cioè l'equazione all'ordine uno, ricordando l'andamento dell'ordine zero, si può scrivere come

$$\frac{\partial v^j}{\partial t} + \frac{\dot{a}}{a} v^j + \frac{1}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} = 0. \quad (2.43)$$

Quest'ultima espressione è proprio l'equazione di Eulero, dove è possibile pensare a  $\Psi$  come ad un potenziale newtoniano invece che relativistico.

Questa equazione “chiude” il sistema con l'equazione 2.41 a condizione di conoscere proprio i due potenziali  $\Phi$  e  $\Psi$ .

Inoltre non compaiono momenti di ordine superiore, ciò è dovuto al fatto che le fluttuazioni di velocità sono piccole. Una particella relativistica non è espandibile in termini della velocità dato che la sua velocità sarà sempre quella della luce. Nel caso classico, invece, la  $v \neq c$  e porsi nei limiti di basse velocità può favorire la presenza di momenti di ordine superiore che quindi non sono considerati.

Questo fa comprendere perchè la trattazione e lo studio delle equazioni della radiazione deve essere necessariamente affrontato nel caso relativistico.

### 2.3.2 Equazione di Boltzmann per i barioni

Per le altre specie si riportano solo i risultati fondamentali, in particolare per i barioni dove sono necessarie due quantità che sono il contrasto di densità  $\delta_b$  e la velocità.

Tramite lo scattering di Coulomb  $e + p \rightarrow e + p$  i barioni sono accoppiati agli elettroni, quindi

- $t_{Coulomb} \ll t_{Hubble}$
- $(\rho_e - \rho_e^0)/\rho_e^0 = (\rho_p - \rho_p^0)/\rho_p^0 = \delta_b$
- $\bar{v}_e = \bar{v}_p \bar{v}_b$ .

Integrando l'equazione di Boltzmann con le funzioni di distribuzione separatamente associate agli elettroni e ai protoni, considerando l'approssimazione  $m_e \ll m_p$  e ponendoci sempre nello spazio di Fourier, conduce all'equazione

$$\dot{\delta}_b + ikv_b = -3\dot{\phi} \quad (2.44)$$

non è altro che l'equazione di continuità per i barioni, perturbata con tempo conforme nello spazio di Fourier. A questo punto come nel caso della Dark Matter si trova l'equazione di Eulero

$$\dot{v}_b + \frac{\dot{a}}{a} + ik\psi = \dot{\tau} \frac{4\rho_\gamma}{3\rho_b} (3i\Theta_1 + v_b) \quad (2.45)$$

mi descrive il moto di un fluido accoppiato alla velocità dei barioni e al dipolo associato alla componente radiativa. Al secondo membro compare al denominatore  $\rho_b$  (densità barionica): elettroni e barioni sono perfettamente accoppiati, infatti nel caso in cui  $\rho_b \rightarrow \infty$  gli elettroni non interagiscono con la radiazione e così il flusso si comporterebbe come una componente di materia oscura, quindi se i barioni hanno massa troppo grande il processo è soppresso.

L'ultimo termine, il quale esprime l'effetto Doppler che i fotoni subiscono quando scatterano sugli elettroni aventi una certa velocità peculiare, non compare nel caso della materia oscura, che non risente della velocità barionica e del dipolo. Si definisce

$$\Theta_1 \equiv i \int_{-1}^1 \frac{d\mu}{2} \mu \Theta(\mu) \quad (2.46)$$

il quale esprime il momento di dipolo (primo momento di  $\Theta$ , coefficienti dell'espansione in polinomi di Legendre). In generale invece di lavorare con  $\Theta(k, \eta, \mu)$  è possibile scegliere  $\Theta_l(k, \eta)$  definito come

$$\Theta_l(k, \eta) = (-i)^l \int_{-1}^1 \frac{d\mu}{2} P_l(\mu) \Theta(k, \eta, \mu) \quad (2.47)$$

dove  $P_l(\mu)$  sono i polinomi di Legendre di ordine  $l$ . Fino a che elettroni e fotoni sono in un regime di accoppiamento stretto gli unici multipoli considerati per risolvere le equazioni sono il *monopolo* e il *dipolo*, questo è equivalente ad affermare che grazie allo scattering Compton che lega in modo efficiente fotoni ed elettroni, posso trattare la radiazione come un fluido.

Questo tipo di approssimazione andrà a rompersi quando il Compton diventerà poco efficiente, il fluido cosmico inizierà a ricombinarsi e questo mi farà comparire, nelle espressioni che descrivono la fisica, momenti di ordine superiore.

## Capitolo 3

# Anisotropie primarie della CMB

L'equazione di Boltzmann lega la perturbazione  $\Theta$  con i potenziali (anche definiti come perturbazioni della metrica)  $\Phi$  e  $\Psi$ . Per poter comprendere il processo evolutivo sono necessarie le equazioni di Einstein ricavate in presenza di metrica perturbata nella Gauge Newtoniano Conforme.

Una domanda che a questo punto della trattazione ci si può chiedere è: cosa giustifica il fatto che l'espansione è adiabatica? Certamente una prima considerazione sta nella conservazione dell'entropia, ma questo non basta in un Universo dove avvengono processi reversibili.

La risposta la si trova nel numero dei fotoni, dell'ordine di  $10^9$  per particella, questo motiva un Universo adiabatico perchè dominato dalla radiazione cosmica di fondo.

### 3.1 Equazioni per i potenziali

Nel limite dove si trascura l'effetto dei quadrupoli si ha che  $\Phi \equiv -\Psi$  cioè uguali e opposti a meno di un termine di "stress anisotropo". Per ricavare il set di equazioni per i potenziali si considera l'ipotesi di avere tempi conformi piccoli "*early times*"  $\Rightarrow k\eta \ll 1$ , tutti i modi sono fuori dall'orizzonte e l'Universo è dominato dalla radiazione. Le equazioni di Einstein Boltzmann per i fotoni  $\gamma$  ed i neutrini  $\nu$  si riducono sotto queste condizioni al sistema

$$\dot{\Theta}_0 = -\dot{\Phi} \quad \dot{N}_0 = -\dot{\Phi} \quad (3.1)$$

mentre per le componenti massive

$$\dot{\delta} = -3\dot{\Phi} \quad \dot{\delta}_{b0} = -3\dot{\Phi}. \quad (3.2)$$

Per quel che riguarda invece i potenziali si ottiene un'equazione che dipende dal monopolo della radiazione

$$3\frac{\dot{a}}{a}\left(\dot{\Phi} - \Psi\frac{\dot{a}}{a}\right) = 16\pi Ga^2[\rho_\gamma\Theta_0 + \rho_\nu N_0]. \quad (3.3)$$

Dato che  $a \propto \eta$  quando domina la radiazione si ottiene il risultato seguente

$$\frac{\dot{\Phi}}{\eta} - \frac{\Psi}{\eta^2} = \frac{2}{\eta^2} \left[ \frac{\rho_\gamma}{\rho}\Theta_0 + \frac{\rho_\nu}{\rho}N_0 \right]$$

$$\eta\dot{\Phi} - \Psi = 2[(1 - f_\nu)\Theta_0 + f_\nu N_0]$$

$$\ddot{\Phi}\eta + \dot{\Phi} - \dot{\Psi} = 2\dot{\Phi}. \quad (3.4)$$

Che ha per soluzione l'espressione

$$\Phi = 2[(1 - f_\nu)\Theta_0 + f_\nu N_0] = 2\Theta_0 \quad (3.5)$$

$$\delta = 3\Theta_0 + \text{cost.} \quad (3.6)$$

L'ultima equazione riconduce alle condizioni adiabatiche iniziali.

Questo è un risultato importante, il quale porta all'approssimazione  $\Psi \approx \eta^0$  quindi è costante, afferma cioè che il potenziale primordiale non scala con il tempo ma si comporta come una costante.

Le sorgenti di variazione del potenziale sono i cambiamenti di stato dell'Universo, un potenziale varia quando il sistema attraversa la transizione tra il dominio della radiazione e quello di materia decadendo così in un nuovo valore costante.

Quindi il potenziale decade attraverso l'equivalenza materia radiazione, come si mostrerà di seguito, il decadimento è più pronunciato per modi che entrano prima dell'equivalenza ( $a_{eq}$ ) nell'orizzonte.

Una soluzione per il potenziale si ricava dalla definizione

$$\Phi(\bar{k}, a) = \Phi_p(\bar{k}) \times \{F. \text{ di Trasferimento } (k)\} \times \{F. \text{ di Crescita } (a)\}$$

dove  $\Psi_p$  indica un potenziale primordiale funzione del numero d'onda  $k$ .

La funzione di Trasferimento, che descrive come cambia il valore del potenziale in funzione del modulo di  $k$ , è definita

$$T(k) \equiv \frac{\Phi(\bar{k}, a_{late})}{\Phi_{LS}(\bar{k}, a_{late})}$$

mentre il fattore di crescita, il quale caratterizza l'eventuale crescita del potenziale in funzione del fattore di scala, è dato da

$$\frac{a}{(a_{late})} \equiv \frac{D_1(a)}{a}.$$

Risulta

$$\Phi(\bar{k}, a) = \frac{9}{10} \Phi_p(\bar{k}) T(k) \frac{D_1(a)}{a} \quad (3.7)$$

dove si osserva come il potenziale, ad ogni tempo e ogni modo, si relazioni con  $\Phi_p$ , questo implica che durante un cambiamento di fase il potenziale subisce un decadimento.

### 3.1.1 Le anisotropie su grandi scale

Si considerino modi  $k\eta \ll 1$  fuori dall'orizzonte dove l'Universo è dominato dalla radiazione. L'evoluzione delle perturbazioni per grandi scale prevede la condizione adiabatica  $\Theta_{r,0} = \delta/3$ , quindi

$$\dot{\Theta}_{r,0} = -\dot{\Phi} \quad (3.8)$$

$$\dot{\delta} = -3\dot{\Phi} \quad (3.9)$$

$$3\frac{\dot{a}}{a} \left( \dot{\Phi} - \Psi \frac{\dot{a}}{a} \right) = 4\pi G a^2 [4\rho_\gamma \Theta_{r,0} + \rho_{dm} \delta] \quad (3.10)$$

introducendo una nuova variabile definita come  $y \equiv a/a_{eq} = \rho_{dm}/\rho_r$  si ottiene

$$3\frac{\dot{a}}{a} \left( \dot{\Phi} - \Psi \frac{\dot{a}}{a} \right) = 4\pi G a^2 \rho_{dm} \delta \left[ 1 + \frac{4}{3y} \right]. \quad (3.11)$$

La soluzione di questa espressione può essere trovata sia analiticamente

$$\Phi = \frac{\Phi_0}{10} \frac{1}{y^3} \left[ 16\sqrt{1+y} + 9y^3 + 2y^2 - 8y - 16 \right] \quad (3.12)$$

che nel limite  $y \gg 1$  cioè  $a \equiv a_{late} \gg a_{eq}$  dove si ricava il risultato per le grandi scale

$$\Phi = \frac{9}{10} \Phi_p. \quad (3.13)$$

Quello che accade alle grandi scale è che il potenziale decade, attraverso l'equivalenza, perdendo 1/10 della sua ampiezza rispetto al potenziale primordiale che aveva prima dell'equivalenza. Come si vede nella figura seguente, il decadimento del potenziale è proporzionale alla scala dell'anisotropia e quindi alla grandezza  $k$ .

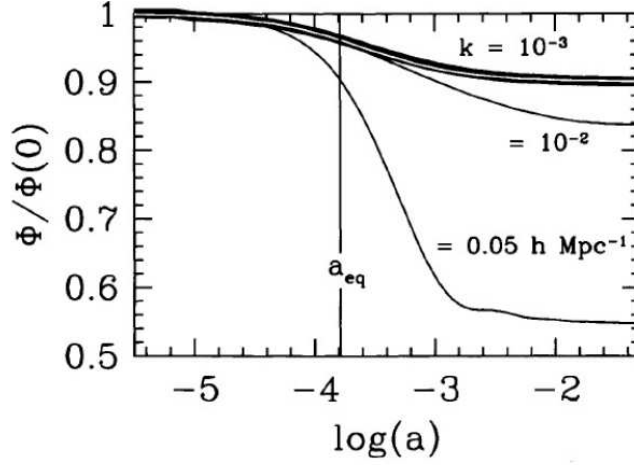


Figura 3.1: Evoluzione super-horizon del potenziale in un modello CDM in assenza di barioni, con  $h = 0.5$  ed  $\Omega_m = 1$ . La linea continua più spessa mostra il risultato analitico dell'eq. 3.12, valida solo su larga scala. Le altre curve sono valide per un modo con  $k = 0.001 h Mpc^{-1}$  e per altri due modi di minore entità [20].

Per piccoli  $k\eta$  vale la condizione

$$\Theta_0 = -\Phi + cost \quad (3.14)$$

la condizione iniziale è  $\Theta_0 = \Phi_p/2$  da cui la costante avrà il valore di  $3\Phi_p/2$ , ponendo la ricombinazione ben oltre l'equivalenza ( $y \gg 1$ )

$$\Theta_0(k, \eta_*) = -\Phi(k, \eta_*) + \frac{3}{2} \Phi_p(k) = \frac{2}{3} \Phi(k, \eta_*) \quad (3.15)$$

dove  $\eta_*$  è il tempo alla ricombinazione, l'anisotropia osservata è  $\Theta_0 + \Psi$  data dalla temperatura che si osserva dalla radiazione cosmica di fondo, sommata al redshift



gravitazionale che il fotone subisce per poter uscire dalla buca di potenziale causata dal potenziale. Trascurando i quadrupoli di radiazione  $\Psi = -\Phi$ , si ottiene

$$(\Theta_0 + \Psi)(k, \eta_*) = \frac{1}{3}(k, \eta_*) \quad (3.16)$$

questa equazione mostra il legame che c'è tra l'anisotropia osservata e la fluttuazione del potenziale. Il fotone che esce fuori dalla buca di potenziale, ha un'anisotropia che è 1/3 del valore della buca di potenziale medesima.

Un altro modo di vedere questo stesso risultato è di esprimerlo in termini di contrasto di densità: per il campo di densità la condizione iniziale è  $\delta = 3\Phi/2$ , mentre l'equazione di Boltzmann per le grandi scale è  $\dot{\delta} = -3\dot{\Phi}$ , quindi integrando in  $\eta$

$$\delta(\eta_*) - \delta(\eta_0) = \frac{3}{2}\Phi_p - 3[\Phi(\eta_*) - \Phi_p] = 2\Phi(\eta_*) \quad (3.17)$$

dove  $\delta(\eta_0)$  si può porre uguale a zero per tempi primordiali piccoli, quindi

$$(\Theta_0 + \Psi)(k, \eta_*) = -\frac{1}{6}\delta(\eta_*). \quad (3.18)$$

Questo risultato è estremamente interessante: una ragione sovradensa (in cui c'è una perturbazione positiva alla materia) ha una anisotropia negativa  $\Theta_0 + \Psi$ , i fotoni nella buca di potenziale di questa regione sono più caldi ma devono comunque perdere energia per poter uscire fuori.

Quindi per scale grandi, così come si vedono sulla superficie di ultimo scattering, si ha questo paradosso: le zone che appaiono fredde, cioè con temperature più basse rispetto alla media, sono in realtà zone che contengono fotoni caldi ovvero delle sovradensità. Il paradosso trova soluzione nel fatto che ciò avviene perché, di per sé il fotone caldo per uscire dalla buca di potenziale subisce redshift gravitazionale, in modo così elevato tale da cambiare segno alla perturbazione in temperatura.

Questo effetto è vero solo per grandi scale ovvero modi collegati al potenziale primordiale  $\Phi_p$ .

Un altro risultato importante è nel fattore 1/6, infatti

$$\frac{\delta T}{T} \approx 10^{-5} \quad \frac{\delta \rho}{\rho} \approx 6 \times 10^{-5} \quad (3.19)$$

risolve in parte il problema della piccolezza delle anisotropie rispetto alla distribuzione di materia, il fattore 6 aiuta le sovra-densità a collassare e generare strutture. Viceversa i modelli alternativi all'inflazione hanno un fattore più basso che complica decisamente l'evoluzione delle strutture.

### 3.1.2 Il regime di tight-coupling

Prima della ricombinazione si ha che lo scattering Compton efficace è nel mantenere fotoni e barioni legati tra loro con un libero cammino medio per i fotoni decisamente più piccolo dell'orizzonte. Questo fenomeno è noto con il nome di *regime di tight-coupling* dove il rate di scattering è maggiore del rate di espansione dell'Universo ( $\tau \gg 1$ ).

In questo limite contano solo i momenti di ordine zero e uno, ciò permette di porsi nell'*approssimazione fluida* dove anche i fotoni sono descritti da una densità  $\Theta_0$  e da una velocità  $\Theta_1$ .

Moltiplicando l'equazione di Boltzmann dei fotoni per  $P_l(\mu)$  e integrando, per  $l \gg 2$

$$\dot{\Theta}_l + \frac{k}{(-i)^{l+1}} \int_{-1}^1 \frac{d\mu}{2} \mu P_l(\mu) \Theta(\mu) = \dot{\tau} \Theta_l \quad (3.20)$$

Utilizzando la relazione di ricorrenza per i polinomi di Legendre

$$(l+1)P_{l+1}(\mu) = (2l+1)\mu P_l(\mu) - lP_{l-1}(\mu) \quad (3.21)$$

si riscrive l'equazione 3.1.2 nella forma

$$\dot{\Theta}_l + \frac{kl}{2l+1} \Theta_{l-1} + \frac{k(l+1)}{2l+1} = \dot{\tau} \Theta_l. \quad (3.22)$$

Dei due termini quello di destra è più grande, tralasciando il momento  $l+1$  (multipoli di ordine superiore, è possibile verificare che contano nel caso di uno scatter Compton poco efficiente), si ottiene

$$\Theta_l \approx \frac{k\eta}{2\tau} \Theta_{l-1} \quad (3.23)$$

per scale sull'orizzonte  $k\eta \cong 1$  se  $\tau \gg 1 \Rightarrow \Theta_l \ll \Theta_{l-1}$  per questo tutti i multipoli di ordine superiore sono *dampati* rispetto a quelli più piccoli (per questo si può troncare l'equazione di Boltzmann).

Si possiamo scrivere le equazioni per il monopolo e il dipolo:

$$\dot{\Theta}_0 + k\Theta_1 = -\dot{\Phi} \quad (3.24)$$

$$\dot{\Theta}_1 + \frac{k\Theta_0}{3} = \frac{k\Psi}{3} + \dot{\tau} \left[ \Theta_1 - \frac{iv_b}{3} \right] \quad (3.25)$$

ottenute trascurando tutti i multipoli di ordine  $l \gg 1$ , nella seconda espressione per il dipolo compare la velocità dei barioni che necessita di un'equazione a parte

$$v_b = -3i\Theta_1 + \frac{R}{\dot{\tau}} \left[ \dot{\tau} + \frac{\dot{a}}{a} v_b + ik\Psi \right] \quad (3.26)$$

all'ordine più basso  $v_b \approx -3i\Theta_1$ , la correzione al primo ordine conduce all'espressione per la velocità dei barioni seguente

$$v_b \cong -3i\Theta_1 + \frac{R}{\dot{\tau}} \left[ -3i\dot{\Theta}_1 - 3i\frac{\dot{a}}{a}\Theta_1 + ik\Psi \right]. \quad (3.27)$$

A questo punto è possibile eliminare la dipendenza da  $v_b$  e chiudere le due equazioni per i monopoli, l'equazione per il dipolo si trasforma nell'equazione

$$\Theta_1 + \frac{\dot{a}}{a} \frac{R}{1+R} \Theta_1 - \frac{k}{3[1+R]} \Theta_0 = \frac{k}{3} \Psi \quad (3.28)$$

mentre per l'ordine zero

$$\Theta_0 + k\Theta_1 = -\dot{\Phi} \quad (3.29)$$

Derivando la seconda equazione e sostituendo in essa l'espressione di  $\Theta_1$  dalla prima si ottiene

$$\ddot{\Theta}_0 + \frac{\dot{a}}{a} \frac{R}{1+R} \dot{\Theta}_0 + k^2 c_s^2 \Theta_0 = -\ddot{\Phi} - \frac{\dot{a}}{a} \frac{R}{1+R} \dot{\Phi} - \frac{k^2}{3} \Psi \quad (3.30)$$

rappresenta l'equazione di un oscillatore armonico smorzato (con forzante l'espressione di destra, che può essere approssimata costante dato che i potenziali evolvono poco), si definisce la velocità del suono nel seguente modo

$$c_s \equiv \sqrt{\frac{1}{3(1+R)}} \quad (3.31)$$

l'effetto dei barioni è quello di ridurre la velocità del suono del fluido. L'equazione 3.1.2 descrive le oscillazioni per quei modi che sono effettivamente entrati nell'orizzonte e riescono quindi ad oscillare.

Nel momento in cui le perturbazioni dei fotoni entrano in connessione causale questi oggetti oscillano, possono farlo grazie al fatto che la naturale tendenza al collasso gravitazionale dei fotoni è controbilanciata dalla pressione della radiazione.

La compressione e la rarefazione danno vita ad uno spettro di picchi armonici, l'altezza dei picchi non è sempre uguale ma tende a diminuire al crescere del numero d'onda  $k$  (perturbazioni sempre più piccole, le quali saranno soggette al damping).

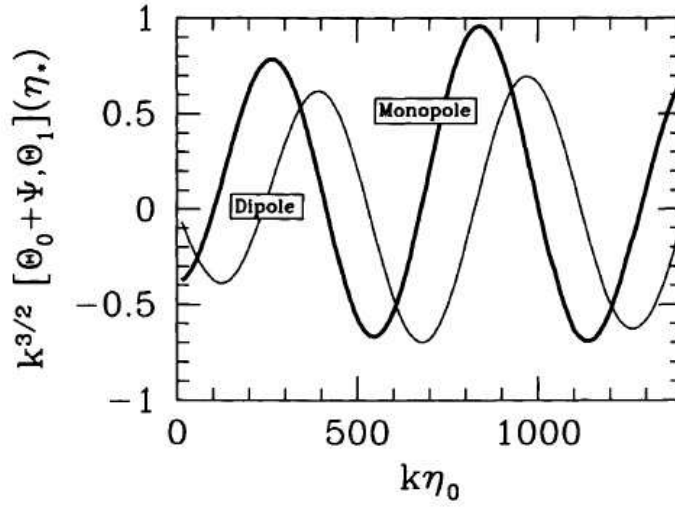


Figura 3.2: Il monopolo e dipolo alla ricombinazione in un modello standard CDM, il dipolo svanisce per modi più grandi e per lunghezze d'onda che non sono entrate nell'orizzonte. Il monopolo è completamente sfasato [20].

In una versione alternativa, passando al tempo conforme e raggruppando i vari termini si ha una forma dell'espressione che non dipende più dalla derivata dei potenziali

$$\left\{ \frac{d^2}{d\eta^2} + \frac{\dot{R}}{1+R} \frac{d}{d\eta} + k^2 c_s^2 \right\} [\Theta_0 + \Phi] = \frac{k^3}{3} \left[ \frac{1}{1+R} \Phi - \Psi \right]. \quad (3.32)$$

Per risolvere questa equazione si procede con il metodo di Green: si trovano le soluzioni dell'equazione omogenea associata e si costruisce a partire da queste la soluzione generale.

Trascurando i termini di damping, le soluzioni dell'omogenea sono

$$S_1(k, \eta) = \sin [kr_s(\eta)]$$

$$S_2(k, \eta) = \cos [kr_s(\eta)]$$

dove ora non compare la velocità del suono ma l'orizzonte del suono ovvero la distanza comovente percorsa nel fluido da un'onda acustica

$$r_s(\eta) = \int_0^\eta d\eta' c_s(\eta'). \quad (3.33)$$

Ricordando le condizioni iniziali si ottiene la soluzione generale del tipo

$$\begin{aligned} \Theta_0(\eta) + \Phi(\eta) &= [\Theta_0(0) + \Phi(0)] \cos(kr_s) \\ &+ \frac{k}{\sqrt{3}} \int_0^\eta d\eta' [\Phi(\eta') - \Psi(\eta')] \sin \left\{ k [r_s(\eta) - r_s(\eta')] \right\}. \end{aligned}$$

Questa soluzione analitica è di estrema importanza: di fatto con questa approssimazione si è disaccoppiata l'equazione di Boltzmann per la radiazione da quella dei potenziali. A patto di conoscere il comportamento dei potenziali, l'equazione descrive una soluzione per la radiazione.

La scelta delle condizioni iniziali (definite dall'inflazione) permette di affermare che le oscillazioni non sono casuali ma dovute a combinazioni di seni e coseni, anche se l'unico modo che sopravvive è l'ultimo.

L'equazione permette di stabilire accuratamente le posizioni dei picchi di oscillazione in funzione di  $k\eta_0$ , dove i picchi non sono altro che i massimi e i minimi di un coseno e la loro posizione è stabilita in corrispondenza dei numeri d'onda  $k_p = n\pi/r_s$ .

Pertanto il primo picco è dovuto ad un'onda che ha raggiunto il suo massimo di compressione al tempo della ricombinazione, la prima gola nello spettro della CMB è invece un'oscillazione entrata prima nell'orizzonte (ha potuto oscillare di più della prima) e ha raggiunto metà oscillazione.

Mentre il secondo picco è un'onda entrata nell'orizzonte ancora prima e che ha compiuto un ciclo completo di oscillazione e si trova nella fase di rarefazione.

Introducendo il damping le intensità dei picchi possono essere ottenute in modo più accurato, alla fine questa equazione riproduce in modo molto fedele la soluzione numerica esatta.

Derivando si ottiene per il dipolo (sfasato di  $\pi/2$  rispetto al monopolio)

$$\begin{aligned} \Theta_1(\eta) &= \frac{1}{\sqrt{3}} [\Theta_0(0) + \Phi(0)] \sin(kr_s) \\ &- \frac{k}{3} \int_0^\eta d\eta' [\Phi(\eta') - \Psi(\eta')] \cos \left\{ k [r_s(\eta) - r_s(\eta')] \right\}. \end{aligned}$$

Questo spiega perchè le gole nello spettro di potenza non siano uguali a zero ma sono riempite dai massimi del dipolo, che è più piccolo di un fattore  $1/\sqrt{3}$ .

Includendo inoltre il termine di smorzamento, si può osservare che l'effetto di quest'ultimo è di cancellare le anisotropie sulle piccole scale angolari.

### 3.1.3 La diffusione e il damping

L'unica mancanza in questa trattazione è che non riproduce il damping. Questo avviene perchè sono stati trascurati i momenti di ordine superiori, in particolare il quadrupolo  $\Theta_2(k, \eta)$ , dato che contano solo le piccole scale

$$\dot{\Theta}_0 + k\Theta_1 = 0 \quad (3.34)$$

$$\dot{\Theta}_1 + k \left( \frac{2}{5}\Theta_2 - \frac{1}{3}\Theta_0 \right) = \dot{\tau} \left( \Theta_1 - \frac{iv_b}{3} \right) \quad (3.35)$$

$$\dot{\Theta}_1 - \frac{2}{5}k\Theta_1 = \frac{9}{10}\dot{\tau}\Theta_2. \quad (3.36)$$

Riportando di seguito il risultato, la dipendenza temporale della perturbazione è data da

$$\Theta_0, \Theta_1 \approx \exp \left\{ ik \int d\eta c_s \right\} \exp \left\{ -\frac{k^2}{k_d^2} \right\}$$

dove  $k_d$  è dell'ordine di  $\lambda_D = 1/\sqrt{n_e \sigma_T \bar{H}}$  e l'integrale può quindi essere calcolato direttamente

$$k_d^2 = 3.1 \times 10^6 Mpc^{-2} a^{5/2} f_D(a/a_{eq}) (\Omega_b h^2)^{-2} \left( 1 - \frac{Y_p}{2} \right)^{-1} (\Omega_m h^2)^{-1/2}.$$

Il punto fondamentale sta nel fatto che si ha sempre una lunghezza di damping anche quando il limite di thing coupling è efficace.

## 3.2 Il free streaming

Tutto quanto visto fino ad ora permette di calcolare  $\Theta_l$  al tempo della ricombinazione  $\eta_*$ . Si vedrà come le anisotropie sono trasferite dalla superficie di ultimo scattering fino a

noi, le soluzioni sono di tipo analitico. Bisogna calcolare le anisotropie al tempo  $\eta_0$  e per farlo si riparte dall'equazione di Boltzmann per i fotoni che si riscrive nella forma

$$\tilde{S} \equiv \dot{\Theta} + (ik\mu - \dot{\tau})\Theta = -\dot{\Phi} - ik\mu\Psi - \dot{\tau} \left[ \Theta_0 + \mu v_b - \frac{1}{2}P_2(\mu) \Pi \right]. \quad (3.37)$$

Il termine di sinistra può essere pensato come il risultato di una derivazione rispetto a  $\eta$ , infatti compaiono tutte derivate temporali. In effetti

$$\dot{\Theta} + (ik\mu - \dot{\tau})\Theta = e^{-ik\mu\eta+\tau} \frac{\partial}{\partial\eta} [\Theta e^{ik\mu\eta-\tau}] = \tilde{S}. \quad (3.38)$$

Non è esattamente vero che non accade nulla tra la ricombinazione e noi ad esempio variano i potenziali. Comunque il primo effetto è quello di proiezione di anisotropie locali che osservatori locali vedrebbero su scale angolari grandi e che sono trasferite su piccole scale. Il processo è di proiezione data l'enorme distanza che ci separa dalla superficie di ultimo scattering e l'effetto prende il nome di *free streaming* cioè le anisotropie si propagano in modo libero (o quasi).

Se si moltiplicano entrambi i membri per l'esponenziale e si integra in  $\eta$  si ottiene

$$\Theta(\eta_0) = \Theta(\eta_i) e^{ik\mu(\eta_i-\eta_0)} e^{-\tau\eta_i} + \int_{\eta_i}^{\eta_0} d\eta \tilde{S}(\eta) e^{ik\mu(\eta-\eta_0)-\tau(\eta)}$$

dove il primo membro a destra si trascura per  $\eta_i \rightarrow 0$ . L'espressione risulta quindi

$$\Theta(k, \mu, \eta_0) = \int_{\eta_i}^{\eta_0} d\eta \tilde{S}(k, \mu, \eta) e^{ik\mu(\eta-\eta_0)-\tau(\eta)}. \quad (3.39)$$

Il termine sorgente  $\tilde{S}$  è complicato per via della dipendenza angolare  $\mu$

$$\Theta(\mu, \eta_0) = (-)^l \int_0^{\eta_0} d\eta \tilde{S}(k, \eta) e^{\tau(\eta)} j_l [k(\eta - \eta_0)] \quad (3.40)$$

dove  $j_l$  sono le funzioni sferiche di Bessel di ordine  $l$ .

Notando che

$$\int_{-1}^1 \frac{d\mu}{2} P_l(\mu) e^{ik\mu(\eta-\eta_0)} = \frac{1}{(-i)^l} j_l [k(\eta - \eta_0)].$$

Però la dipendenza da  $\mu$  c'è, è possibile manipolare l'esponenziale, per  $\Psi$  ad esempio

$$-ik \int_0^{\eta_0} d\eta \mu \Psi e^{ik\mu(\eta-\eta_0)-\tau} = - \int_0^{\eta_0} d\eta \Psi e^{\tau(\eta)} \frac{\partial}{\partial\eta} e^{ik\mu(\eta-\eta_0)}$$

integrando per parti e trascurando il termine di bordo (monopolo non osservabile)

$$\int_0^{\eta_0} d\eta e^{ik\mu(\eta-\eta_0)} \frac{\partial}{\partial \eta} [\Psi e^{-\tau(\eta)}]$$

operando in maniera analoga per gli altri termini si ottiene  $S$  senza la dipendenza angolare da  $\mu$

$$\Theta_l(k, \eta_0) = (-)^l \int_0^{\eta_0} d\eta S(k, \eta) e^{-\tau(\eta)} j_l [k(\eta_0 - \eta)]. \quad (3.41)$$

A questo punto è stata formalmente risolta l'equazione avendo l'espressione di ogni monopolo dell'equazione di Boltzmann in funzione di  $k$  al tempo attuale come, un certo integrale che contiene al suo interno un termine sorgente accoppiato con la funzione  $\tau$  e la funzione di Bessel  $j_l$ . La soluzione per l'ultimo integrale in  $\eta_0$  permette di ricavare la soluzione esplicita

$$S(k, \eta) \equiv e^{-\tau} \left[ -\dot{\Phi} \dot{\tau} \left( \Theta_0 + \frac{1}{4} \mathbf{\Pi} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ e^{-\tau} \left( \Psi - \frac{iv_b \dot{\tau}}{k} \right) \right] - \frac{3}{4k^2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left[ \dot{\tau} e^{-\tau} \mathbf{\Pi} \right].$$

Adesso è utile introdurre una funzione nota come *funzione di visibilità* definita da

$$g(\eta) = -\dot{\tau} e^{-\tau} \quad (3.42)$$

la quale ha l'interessante proprietà di avere l'integrale, con segno meno, nel tempo conforme tra 0 ed  $\eta_0$  pari ad 1. Quindi è possibile vedere questa espressione come una densità di probabilità: è la probabilità che un fotone venga scatterato per l'ultima volta, la sua distribuzione a campana definisce la larghezza della superficie di ultimo scattering al tempo conforme. Trascurando il quadrupolo

$$S(k, \eta) \cong g(\eta) [\Theta_0 + \Psi] \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \frac{iv_b}{k} \right] + e^{-\tau} \left[ \dot{\Psi}(k, \eta) - \dot{\Phi}(k, \eta) \right]. \quad (3.43)$$

Integrando per parti, in cui si eliminano i termini fuori dall'integrale per le proprietà della  $g(\eta)$  (la quale è piccata intorno a  $\eta_*$ ), si ottiene

$$\Theta_l(k, \eta) = \int_0^{\eta_0} d\eta g(\eta) [\Theta_0(k, \eta) + \Psi(k, \eta)] j_l [k(\eta_0 - \eta)] - \int_0^{\eta_0} d\eta g(\eta) \frac{iv_b 8k, \eta}{k} j_l [k(\eta_0 - \eta)] +$$



$$\int_0^{\eta_0} d\eta e^{-\tau} \left[ \dot{\Psi}(k, \eta) - \dot{\Phi}(k, \eta) \right] j_l [k(\eta_0 - \eta)]$$

I primi due termini sono pesati per la funzione di visibilità quindi potranno ricevere un contributo fortemente piccato intorno a  $\eta_*$ . L'ultimo termine invece ha contributi da parte di tutti i tempi, ad epoche molto remote, in cui  $\tau \gg 1$ , risulta fortemente soppresso ma questo non è più vero dopo la ricombinazione.

Questo termine è legato alla variazione dei potenziali, se questi sono costanti non contribuisce per niente.

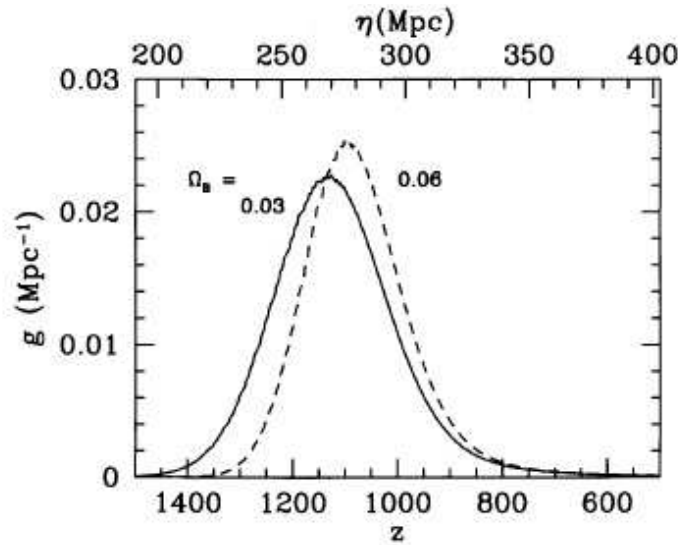


Figura 3.3: La funzione di visibilità, la maggior parte degli elettroni scattera a circa  $z \approx 1100$  con poca dipendenza dalla densità dei barioni. Notare che l'integrale nel tempo della  $g$  è 1, inoltre qui  $h = 0.5$  [20].

Chiaramente se cambia la specie che domina (radiazione/materia) il contenuto di energia dell'Universo, varia anche il valore dei potenziali.

Recentemente l'Universo sta attraversando una fase che si associa essere dovuta ad una componente di dark energy questo permette a quest'ultimo termine di avere un contributo che sarà ancora non nullo.

Complessivamente questo fenomeno prende il nome di *effetto Sachs-Wolfe integrato* dato che coinvolge gli integrali delle variazioni dei potenziali.

Sempre nell'ultima espressione sono presenti anche le funzioni di Bessel ( $j_l$ ), le quali sono fortemente sopprese per  $l \gg k\eta_0$ , fortemente oscillanti per  $l$  più piccoli mentre sono piccate per  $l \approx k\eta_0$ .

### 3.3 Predizione di anisotropie: i $C_l$

Utilizzando la trattazione fin qui esposta si vuole ora calcolare le anisotropie al tempo  $\eta_0$ , il pattern di anisotropia studiate si legano ai  $\Theta_l(k, \eta_0)$  nel modo che segue

$$T(\bar{x}, \hat{p}, \eta) = T(\eta) [1 + \Theta(\bar{x}, \hat{p}, \eta)] \quad (3.44)$$

la temperatura osservata sarà data dalla temperatura di background della radiazione, dove la parte di anisotropia (che si può osservare solo qui  $\bar{x}_0$  ed ora  $\eta_0$ ) è funzione della posizione spaziale ( $\bar{x}$ ), dell'impulso del fotone ( $\hat{p}$ ) ovvero la direzione da cui l'osservatore vede arrivare il fotone che porta con sé l'informazione di anisotropia e del tempo conforme ( $\eta$ ). Si può espandere la parte angolare delle anisotropie osservate in armoniche sferiche

$$\Theta(\bar{x}, \hat{p}, \eta) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm}(\bar{x}, \eta) Y_{lm}(\hat{p}) \quad (3.45)$$

l'espansione è stata fatta considerando l'unico grado di libertà, il quale permette di guardare il cielo sotto diverse direzioni in cui i fotoni appartenenti alla radiazione cosmica di fondo possono essere rilevati, per questo si è variato nelle tre componenti il versore impulso (che però corrisponde solo a 2 gradi di libertà infatti la volta celeste è definita da una superficie sferica).

Le armoniche sferiche formano una base ortogonale sulla sfera  $S^2$

$$\int_{4\pi} d\Omega Y_{lm}(\hat{p}) Y_{l'm'}^*(\hat{p}) = \delta_{ll'} \delta_{mm'}. \quad (3.46)$$

Questi coefficienti hanno media nulla perchè il campo di anisotropia è a media nulla (con  $\bar{k}$  ottenuta dall'antitrasformata)

$$a_{lm}(\bar{x}, \eta) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\bar{k}\cdot\bar{x}} \int_{4\pi} d\Omega Y_{lm}^*(\hat{p}) \Theta(\bar{k}, \hat{p}, \eta) \quad (3.47)$$

però non lo sarà la covarianza, infatti si può ricavare lo spettro di potenza

$$\langle a_{lm} a_{l'm'} \rangle = C_l \delta_{ll'} \delta_{mm'}. \quad (3.48)$$

Data l'isotropia statistica lo spettro sarà funzione solo di  $l$ , ovvero si sta affermando che la trasformata di Legendre dello spettro di potenza che è la funzione di correlazione sulla sfera può essere funzione solo di  $l$ , così  $C_l$  racchiude in sé tutta la statistica del campo. Calcolando l'espansione in armoniche sferiche (con l'antitrasformata di Fourier) e sfruttando l'espansione in polinomi di Legendre lo spettro di potenza assume la forma

$$C_l = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} P(k) \sum_{l' l''} (-i)^{l'} i^{l''} (2l' + 1)(2l'' + 1) \frac{\Theta_{l'}(k) \Theta_{l''}(k)}{|\delta(k)|^2} \times \\ \int d\Omega Y_{lm}^*(\hat{p}) P_{l'}(k \cdot \hat{p}) \int d\Omega' Y_{lm}(\hat{p}') P_{l''}(k \cdot \hat{p}').$$

I due integrali angolari sono identici e danno un contributo non nullo:  $4\pi Y_{lm}/(2l+1)$  solo se  $l'' = l' = l$ . L'integrale in  $d^3k$  si può separare in un integrale sferico sul modulo quadro delle armoniche sferiche che darà 1. Resta quindi

$$C_l = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dk k^2 P(k) \left| \frac{\Theta_l(k)}{\delta(k)} \right|^2 \quad (3.49)$$

la quale è l'espressione finale dello spettro di potenza della radiazione cosmica di fondo. Per ogni  $l$  la varianza degli  $a_{l,m}$  dipende da un integrale su tutti i  $k$  dello spettro di potenza per una funzione di trasferimento che descrive come evolve la radiazione in rapporto alla materia.

Come si vede non è un'espressione banale, quindi ciò condurrà ad una dipendenza di questa, abbastanza complicata, dai parametri cosmologici che determinano l'evoluzione della  $\Theta_l$  fino ad  $\eta_0$  e dello spettro primordiale delle fluttuazioni. Sapendo che i  $\Theta_l$  oscillano, anche data la difficoltà numerica nel calcolare l'integrale, si può comunque concludere che  $C_l$  dovrà esibire dei picchi.

### 3.4 L'effetto Sachs-Wolfe

Considerando l'equazione di Boltzmann per le grandi scale e assumendo che il potenziale non cambi tra la ricombinazione e un ipotetico osservatore posto all'epoca attuale

$$\Theta_0(\eta_*) + \Psi(\eta_*) \cong \frac{\Psi(\eta_0)}{3D_1(a_0)} \cong -\frac{\Phi(\eta_*)}{3D_1(a_0)} \quad (3.50)$$

a seguire un interessante e utile espressione per  $\Phi$  valida sotto la condizione  $k\eta \ll 1$  con  $a \gg a_{eq}$

$$\Theta_0(\eta_*) + \Psi(\eta_*) \cong -\frac{\Omega_m H_0^2}{2k^2 D_1(a_0)} \delta(\eta_0). \quad (3.51)$$

Questa permette di ricavare  $\Theta_l$  dall'equazione del free streaming

$$C_l^{SW} = \frac{\Omega_m^2 H_0^4}{2\pi D_1^2(a_0)} \int_0^\infty \frac{dk}{k} j_l^2 [k(\eta_0 - \eta_*)] P(k). \quad (3.52)$$

La denominazione *SW* sta per *Sachs-Wolfe* in onore dei ricercatori che per primi, nel 1967, hanno calcolato le anisotropie su grandi scale angolari. Nell'espressione compare lo spettro di potenza, considerando che questo sia uno spettro di potenza inflazionario si ottiene

$$C_l^{SW} = \pi H_0^{1-n} \left( \frac{\Omega_m}{D_1(a_0)} \right)^2 \delta_H^2 \int_0^\infty \frac{dx}{x^{2-n}} j_l^2(x) \quad (3.53)$$

le anisotropie su grandi scale angolari possono essere calcolate analiticamente. La precedente espressione ha una soluzione calcolando l'integrale utilizzando le funzioni sferiche di Bessel le quali possono essere espresse tramite *la funzione Gamma*

$$C_l^{SW} = 2^{n-4} \pi^2 (\eta_0 H_0)^{1-n} \left( \frac{\Omega_m}{D_1(a_0)} \right)^2 \delta_H^2 \frac{\Gamma(l + n/2 - 1/2) \Gamma(3 - n)}{\Gamma(l + 5/2 - n/2) \Gamma^2(2 - n/2)}.$$

Per uno spettro di Harris-Zeldovich con  $n = 1$  si ottiene

$$l(l + 1) C_l^{SW} = \frac{\pi}{2} \left( \frac{\Omega_m}{D_1(a_0)} \right)^2 \delta_H^2 = \text{cost} \quad (3.54)$$

la soluzione, in questo caso, è ancora più semplice infatti le  $\Gamma$  si semplificano e il tutto tende ad una costante. Questo conto analitico mostra come i  $C_l$  sono proporzionali a  $1/l(l + 1)$ , quindi lo spettro di potenza angolare risulterà costante a bassi  $l$ .

## Capitolo 4

# Osservazioni della Radiazione Cosmica di Fondo

La scoperta della radiazione cosmica di fondo è considerata essere, fino ad oggi, la conferma del modello del Big Bang.

La radiazione cosmica di fondo è isotropa fino a circa  $1/10^5$  entro l'errore sperimentale, possiede una temperatura di  $2,725\text{ K}$  con uno spettro di corpo nero tra i più precisi in natura

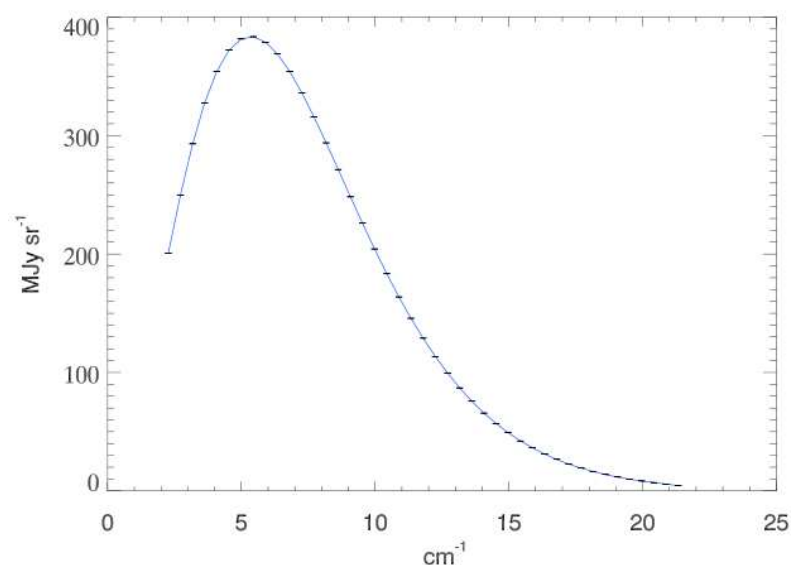


Figura 4.1: Spettro di Temperatura per la radiazione cosmica di fondo, la curva sperimentale è perfettamente in accordo con la curva teorica (linea tratteggiata nera).

Formatasi al termine dell'epoca della *radiazione*, quando la temperatura dell'Universo è diventata sufficientemente bassa da consentire ad elettroni e protoni di combinarsi in atomi di idrogeno e dar vita all'era della *ricombinazione*: i fotoni, che fino a quel

momento formavano un unico fluido con gli elettroni, si disaccoppiano da essi rendendo l'Universo trasparente.

I parametri del Modello Standard sono sostanzialmente di due tipi: i parametri cosmologici che descrivono l'Universo attuale (il rate di espansione, il contenuto di materia e la curvatura) e quelli che riguardano le condizioni iniziali.

Mentre ogni esperimento è sensibile ai vari parametri cosmologici, la radiazione cosmica di fondo sembra essere l'unica in grado di porre limiti stringenti sulle condizioni iniziali e testare, quindi, l'epoca inflazionaria.

## 4.1 Timeline della CMB

- 1948 I fisici George Gamow, Ralph Alpher e Robert Herman predicano l'esistenza della radiazione cosmica di fondo
- 1964 Arno Penzias e Robert Wilson mentre lavorano su un'antenna di telecomunicazioni per i Bell Laboratories trovano una sorgente di rumore che non potevano eliminare misurando una  $T \approx 3 K$
- 1965 Robert Dicke afferma: *"boys we've been scooped"* dopodichè insieme a David Wilkinson interpreta questa radiazione come una firma del Big Bang, nasce la Cosmologia!
- 1983 l'Unione Sovietica lancia la sonda RELIKT-1
- 1992 gli scienziati che hanno analizzato i dati di COBE annunciano la scoperta della temperatura delle anisotropie relative alla CMB [4]
- 1997 primo volo del pallone stratosferico BOOMERanG (Balloon Observations Of Millimetric Extragalactic Radiation and Geophysics) in Antartide, fornisce una immagine ad alta definizione delle anisotropie di temperatura della radiazione cosmica di fondo [2]
- 2001 la sonda WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe) viene lanciato verso il punto L2 il quale minimizza le emissioni proveniente dal Sole, dalla Terra e dalla Luna [24]
- 2009 Planck Surveyor è la terza delle missioni di medie dimensioni dell'Agenzia Spaziale Europea Horizon 2000 Scientific Programme, il satellite è in presa dati in L2 [16].

## 4.2 Wilkinson Microwave Anisotropy Probe

Il 30 giugno del 2001 da Cape Canaveral Air Force Station, Florida (USA), è iniziata l'avventura della sonda spaziale Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP), erede del satellite COBE, è stato così chiamato in onore di David Todd Wilkinson.

Lo scopo del progetto WMAP è la misurazione delle differenze di temperatura nella radiazione cosmica di fondo con la creazione di una mappa completa della CMB, avente risoluzione di 13 arcmin, attraverso un'osservazione di tutto il cielo a multi frequenza. Inoltre tramite uno studio delle anisotropie della CMB è calcolata la geometria dell'Universo, il suo contenuto e l'evoluzione per poter testare i modelli del Big Bang e quello dell'inflazione cosmologica.

Le mappe di CMB sono formate da 3.145.728 pixels e la loro creazione si basa sullo schema proposto da Hierarchical Equal Area isoLatitude Pixelization (HEALPix) [9], che permette di trasferire, a seconda della risoluzione desiderata, i pixels su una sfera. Il programma di studio della radiazione cosmica di fondo, prevede anche la misura della polarizzazione E-mode [20].

Nel complesso il progetto WMAP stimava una vita di 27 mesi, dove 3 sono stati previsti per ricercare la posizione del punto Lagrangiano L2, ed i restanti 24 mesi di osservazione. Alla fine del 2010, dopo alcuni prolungamenti della missione, il satellite WMAP è stato dismesso.

### 4.2.1 Caratteristiche tecniche della sonda WMAP

La sonda WMAP è caratterizzata da due specchi primari di tipo Gregoriano, rispettivamente aventi dimensioni di 1.4 metri e 1.6 metri, rivolti in direzioni opposte tra loro per poter focalizzare il segnale ottico su specchi secondari.

Gli specchi sono stati modellati per poter ottenere delle prestazioni ottimali: un guscio in fibra di carbonio protegge un nocciolo in Korex, ricoperto a sua volta da uno strato sottile di alluminio e ossido di silicio. Gli specchi secondari riflettono il segnale verso sensori ondulati, posti sul piano focale tra i due specchi primari.

Nella parte inferiore, WMAP è protetta da un pannello solare di 5 metri di diametro, che ha lo scopo di tenere la sonda costantemente all'ombra durante il rilevamento della CMB.

Sopra il pannello è posizionato l'apparato di raffreddamento, costituito da una serie di radiatori, i quali raffreddano la strumentazione fino a  $90K$ .

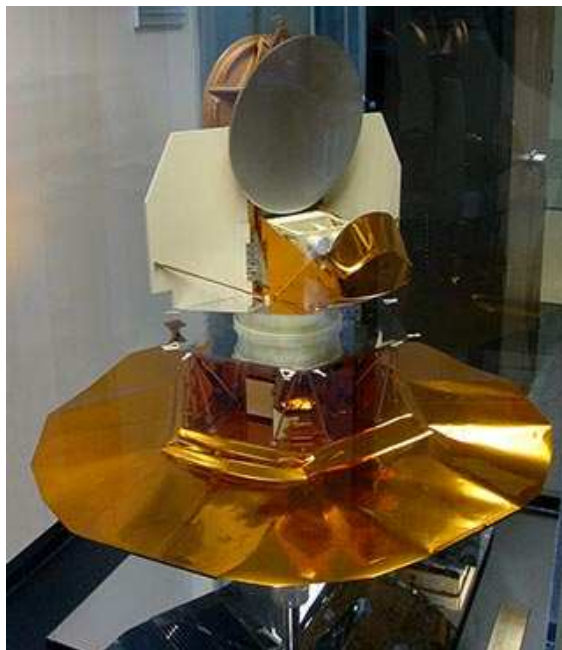


Figura 4.2: la sonda WMAP, si vedono chiaramente i due specchi primari (in alto) e il pannello solare che mantiene la sonda costantemente in ombra (in basso) [24].

I vari ricevitori sono dei radiometri differenziali sensibili alla polarizzazione elettromagnetica, nel suo percorso il segnale è amplificato e la misura finale sarà corrispondente ad una differenza tra i vari segnali provenienti da direzioni opposte.

Per minimizzare i segnali di disturbo provenienti dalla Via Lattea o dalle fonti extra galattiche, lo strumento lavora su cinque frequenze radio: 23 GHz, 33 GHz, 41 GHz, 61 GHz, 94 GHz producendo altrettante mappe.

I meccanismi principali di emissione che contribuiscono a contaminare le mappe di WMAP sono la radiazione di Sincrotrone e quella di Bremsstrahlung, dominanti alle frequenze più basse, mentre le frequenze più alte sono contaminate dalle polveri interstellari. Le proprietà di spettro di queste emissioni danno un contributo diverso nelle cinque frequenze di WMAP, permettendo così la loro identificazione e successiva eliminazione. Il primo ottobre 2001 la sonda ha raggiunto il punto Lagrangiano L2, in questo modo WMAP è diventato il primo satellite nella storia per la scansione della radiazione cosmica di fondo a trovarsi permanentemente in tale punto, dopo 6 mesi ha completato la sua prima analisi dati.

Il punto L2, situato a  $\approx 1.5$  milioni di Km dalla Terra, ha la proprietà di minimizzare le emissioni di disturbo proveniente dal Sole, dalla Terra e dalla Luna, permettendo così anche una buona stabilità termica degli strumenti. La sonda WMAP compie un'intera analisi del cielo ogni sei mesi, avendo completato la prima nell'aprile del 2002.



Originariamente WMAP avrebbe dovuto completare la prima sequenza di osservazioni dopo due anni, cosa che avvenne con successo, un ulteriore prolungamento della missione è stata garantita nel 2004 e così nel complesso la sonda ha raggiunto una vita totale di otto anni, ovvero quella prevista.

La missione sarebbe quindi dovuta terminare nel 2009, ma dopo tale data la NASA ha annunciato un nuovo prolungamento fino al mese di ottobre del 2010, dove la sonda è stata portata verso “l’orbita cimitero” concludendo così di fatto la missione.

La successiva sonda spaziale sviluppata dopo WMAP è Planck Surveyor, progettata e costruita dall’Agenzia Spaziale Europea, il cui lancio è avvenuto il 14 maggio 2009, esso implementa una serie di importanti migliorie per aumentare la risoluzione angolare e la sensibilità finale delle mappe.

Lo spettro di frequenze misurato da Planck va dai 30 GHz dei radiometri dello strumento LFI agli 857 GHz di HFI. Non esistono altre missioni che riguardano la radiazione cosmica di fondo che hanno la proprietà di coprire uno spettro così vasto di frequenze [16]. Una tale copertura servirà a Planck per distinguere, con maggiore accuratezza del suo predecessore, il segnale della CMB dai cosiddetti “foregrounds”, ossia tutte le altre emissioni a tali frequenze che contaminano i dati.

### 4.2.2 Hierarchical Equal Area isoLatitude Pixelization

La procedura di proiezione di pixels eseguita da HEALPix prevede la suddivisione di una superficie sferica in cui ogni pixel ha la proprietà di ricoprire la stessa quantità di superficie del suo vicino. Questa suddivisione può avvenire a risoluzioni progressivamente più alte, come si vede nella figura qui di seguito, la sfera verde rappresenta la più bassa risoluzione possibile tramite la partizione HEALPix base, ovvero a 12 pixels, gli altri colori si riferiscono a risoluzioni via via crescenti.

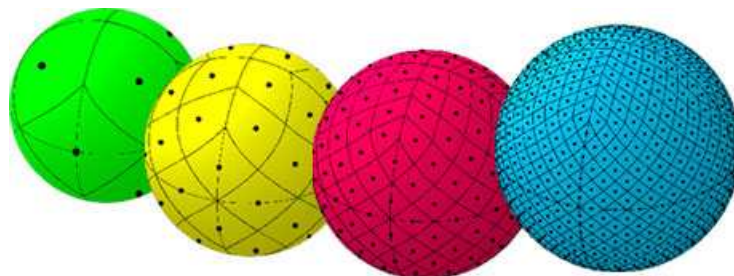


Figura 4.3: Rappresentazione della pixelizzazione su una sfera a diverse risoluzioni con  $N_{pix} = N_{side}^2 \times 12$ , la sfera verde è il caso della risoluzione base.

La sfera base (verde) si costruisce attraverso l'intersezione di tre anelli di latitudine costante dove nel centro delle regioni che si delimitano (punti neri) sono posizionati i pixels. Ovviamente le altre sfere richiederanno l'utilizzo di più anelli (7,15,31) che ne aumenteranno la risoluzione diminuendo le dimensioni della regione di appartenenza del pixel [9].

HEALPix è noto soprattutto per la costruzione di mappe di cielo per il fondo cosmico a microonde con una risoluzione angolare di un paio di minuti d'arco.

Le caratteristiche principali di HEALPix sono:

- la sfera è suddivisa in un mosaico formato da quadrilateri curvilinei, la partizione che ne definisce la risoluzione più bassa è composta da 12 pixels, le altre sono a 48,192 e 768
- le aree di suddivisione per contenere i pixels, per una data risoluzione, sono identiche
- i pixels vengono distribuiti su linee di latitudine costante, a causa di questa distribuzione iso-latitudine dei punti di campionamento, la velocità di calcolo scala come  $N/2$  a differenza del caso no-iso-latitudine il quale scala come il numero dei pixels  $N$ .

Si definisce la risoluzione di una mappa HEALPix come

$$N_{pix} = N_{side}^2 \times 12. \quad (4.1)$$

Le mappe di galassie provenienti dall'NRAO VLA Sky Survey (NVSS) sono con un valore di  $N_{side} = 64$ , mentre quelle di CMB fornite da WMAP sono date a  $N_{side} = 512$ , vanno quindi degradate a  $N_{side} = 64$  per poterle confrontare con le prime ed effettuare uno studio comparativo di tipo statistico.

### 4.2.3 Le mappe risultanti dai dati del 7° anno di WMAP

Dall'anno 2003 la NASA pubblica i risultati dei dati acquisiti dalla sonda WMAP, rendendo noti la composizione dell'Universo, la sua età e fornendo alla comunità scientifica un'immagine dettagliata come quella della figura 1.1. Basandosi sul modello  $\Lambda$ CDM, gli scienziati della missione di WMAP estrapolano quelli che possono essere considerati i principali parametri cosmologici partendo dai dati del primo anno.

L'analisi dei dati utili a produrre mappe di CMB richiede un'elevata mole di quantità da processare computazionalmente, anche perchè bisogna tener conto di tutti gli effetti di rumore che degradano la risoluzione finale.

Nel 2010 sono stati resi noti i risultati del settimo anno di presa dati di WMAP, da questi si riporta un'età per l'Universo di  $13.75 \pm 0.11$  miliardi di anni, inoltre confermano alcune osservazioni ancora oggi non del tutto spiegate: un'anomalia nella massima misura angolare del momento quadrupolo, ed una grande macchia fredda (più di  $70\mu K$ ) rispetto alle proprietà medie della radiazione cosmica di fondo [24].

Lambda-Cold Dark Matter ( $\Lambda$ CDM) cerca di riprodurre e descrivere nel miglior modo le osservazioni cosmologiche effettuate negli ultimi anni basate sul modello del Big Bang, tenendo conto dei dati provenienti dalla radiazione cosmica di fondo, dalle strutture a grande scala e dalle supernovae le quali indicano un Universo in una fase di espansione accelerata.

Il modello racchiude i parametri cosmologici che descrivono il nostro Universo, i più importanti sono [12]:

- il parametro di Hubble  $H_0 \approx 69.5 \text{Kms}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$
- la densità barionica  $\Omega_b \approx 0.0480$
- la densità di materia totale (barioni più dark matter)  $\Omega_m \approx 0.301$
- la profondità ottica alla reionizzazione  $r \approx 0.124$
- l'ampiezza delle fluttuazioni scalari  $A_s \approx 0.81$
- l'indice spettrale  $n_s \approx 0.977$ .

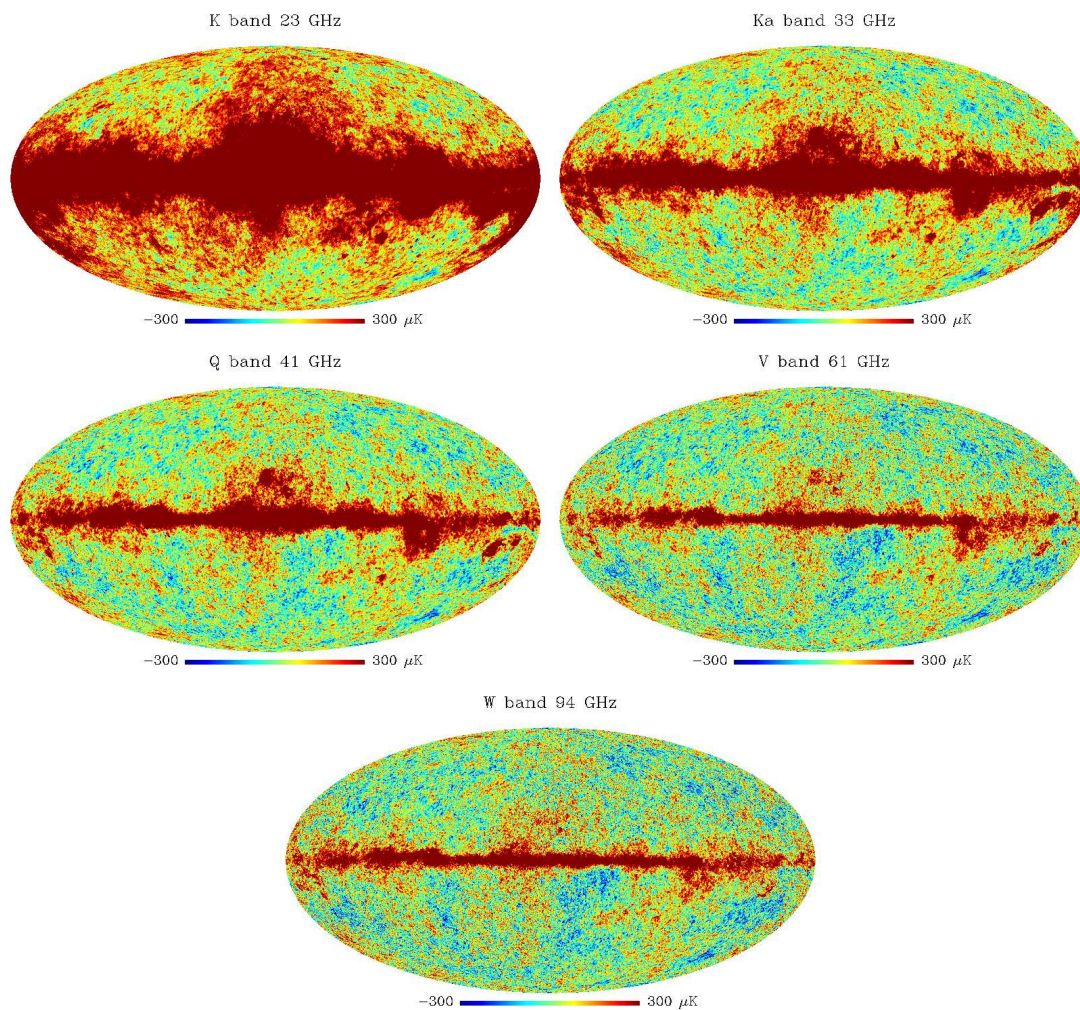


Figura 4.4: Le mappe di WMAP 7 anni nelle frequenze del microonde: sono visibili gli effetti di contaminazione dovute alla radiazione di Sincrotrone e Bremsstrahlung (basse frequenze) e alle polveri stellari (sia basse che alte frequenze).

# Capitolo 5

## Analisi statistica

Le anisotropie relative alla radiazione cosmica di fondo sono state in gran parte originate dalle fluttuazioni di potenziale, velocità e temperatura sulla superficie di ultimo scattering. Tra i vari studi in questo settore, alcuni prevedono un contributo a basso redshift allo spettro di CMB dovuto al processo non lineare di formazione di strutture, il quale, produce una variazione del potenziale gravitazionale. Lo studio della correlazione fra le mappe di temperatura della radiazione cosmica di fondo e le mappe di densità di materia mette dei limiti stringenti sui parametri cosmologici come la densità, l'equazione di stato o la velocità del suono della DE. La determinazione dei parametri cosmologici, che come detto, si basa su un confronto tra le fluttuazioni osservate sperimentalmente e le previsioni teoriche, necessita, oltre ad un modello per l'evoluzione, di assegnare condizioni iniziali da cui partire. La conoscenza di tali condizioni è però impossibile esattamente, in quanto queste sono frutto di un processo casuale. Comunque si può affrontare il problema facendo una ragionevole ipotesi: pur essendo casuali, le fluttuazioni derivano da una distribuzione di probabilità ben definita. Il problema è quindi riconducibile a quello del confronto tra le proprietà statistiche dei dati sperimentali e le proprietà statistiche del modello teorico.

### 5.1 La media d'ensemble

Assegnata la distribuzione iniziale, a priori non nota, è possibile calcolare il valore medio delle quantità a cui siamo interessati mediante le tecniche note della meccanica statistica, per definizione

$$\langle \zeta(x) \rangle \equiv \int f(\zeta) d\zeta \quad (5.1)$$

dove  $\zeta(x)$  è un generico campo fisico mentre  $f(\zeta)$  è la distribuzione di probabilità da cui deriva  $\zeta$ . L'Universo che stiamo descrivendo si configura come una possibile realizzazione di un certo ensemble statistico. Una conseguenza immediata di ciò, è che potendo osservare direttamente una sola realizzazione dell'ensemble, il nostro Universo appunto, le medie saranno affette da errori dove il limite intrinseco alla precisione con cui possiamo calcolarle è detto varianza cosmica.

La forma che ci aspettiamo per  $f(\zeta)$  è quella di una Gaussiana [14]

$$f(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\sigma}} \exp\left(-\frac{\zeta^2}{2\sigma^2}\right) \quad (5.2)$$

in base al teorema del limite centrale, se le fluttuazioni sono il risultato di molti piccoli effetti più o meno equivalenti tra loro.

Non è necessario accettare la gaussianità di  $f(\zeta)$  come un dato di fatto, ma fortunatamente quest'ipotesi è verificata dai dati sperimentali.

## 5.2 Funzione di correlazione a due punti

La funzione di correlazione a 2 punti è lo strumento utilizzato per l'analisi statistica dei dati a disposizione per questo lavoro, il loro significato risiede nei momenti di ordine due, o di ordine  $N$  nel caso di funzioni a  $N$  punti, della distribuzione d'ensemble.

La condizione che si impone è quella di avere fluttuazioni intorno ad un profilo di densità costante, dove il contrasto  $\delta(x, t)$  è a media nulla

$$\langle \delta(x, t) \rangle = 0 \quad (5.3)$$

definendo la funzione di densità

$$\rho(x, t) = \langle \rho(x, t) \rangle [1 + \delta(x, t)]$$

e il contrasto di densità

$$\delta(x, t) = \frac{\delta\rho(x, t)}{\rho(x, t)}.$$

La funzione di correlazione ad un punto si mostra poco utile, mentre quella a due punti è definita semplicemente

$$\langle \delta(x_1, t) \delta(x_2, t) \rangle_E = \xi(|x_1 - x_2|) = C(\xi) \quad (5.4)$$

la quale rappresenta la correlazione tra i dati ad una certa distanza fissa  $\xi$ , mentre il pedice  $E$  indica che il tutto è mediato sull'ensemble statistico.

La funzione di correlazione a due punti per la materia è definita in un dato volume, così, nello studio della cross-correlazione (CCF) per l'analisi dei dati, sarà necessario tenere in considerazione gli effetti di integrazione lungo la linea di vista

$$\xi(|x_2 - x_1|) \equiv \langle \delta(x_1, t) \delta(x_2, t) \rangle_E = \left\langle \int \delta(x_1, t) \delta(x_2, t) \frac{d^3 x_1}{V} \right\rangle_E. \quad (5.5)$$

Non potendo eseguire la media sull'ensemble è possibile introdurre l'ipotesi di "isotropia statistica" la quale semplifica l'espressione 5.5.

Di fatto ponendo  $x_2 = x_1 + r$  si ottiene

$$\begin{aligned} \xi(r) &= \left\langle \int \frac{d^3 x}{V} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{ikx} \delta_k \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} e^{ik'(x+r)} \delta_{k'} \right\rangle_E = \\ &= \left\langle \frac{1}{V} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \int d^3 k' e^{ik'r} \delta_k \delta_{k'} \int \frac{d^3 x}{(2\pi)^3} e^{i(k+k')x} \right\rangle_E = \\ &= \left\langle \frac{1}{V} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \delta_k \int d^3 k' e^{ik'r} \delta_{k'} \delta(k+k') \right\rangle_E = \\ &= \left\langle \frac{1}{V} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \delta_k \delta_{-k} e^{ikr} \right\rangle_E. \end{aligned}$$

Dato che il contrasto di densità è reale:  $\delta_{-k} = \delta_k^*$ , quindi si ottiene

$$\xi(r) = \left\langle \frac{1}{V} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} |\delta_k|^2 e^{ikr} \right\rangle_E \quad (5.6)$$

in conclusione si ottiene la trasformata di Fourier della funzione di correlazione a due punti.

Più che in termini di  $\xi(r)$  le proprietà statistiche dei dati vengono, quindi, espresse tramite

lo *Spettro di Potenza*

$$\xi(r) = \frac{|\delta_k|^2}{V} \equiv P(k) \quad (5.7)$$

descrive la fisica delle perturbazioni di densità, dove a  $k$  può essere associata una distanza  $\lambda \propto 1/k$  e quindi  $P(k)$  ha anche il significato di covarianza tra i dati alla distanza  $\lambda$ . Lo spettro di potenza  $P(k)$ , dunque, è una misura intrinseca dell'ampiezza delle fluttuazioni alla scala  $\lambda$ .

### 5.3 Spettro di Harrison-Zeldovich

Un modello di spettro di potenza che sembra rispondere in modo esaustivo alle proprietà di molti fenomeni fisici si ottiene assumendo la forma di una legge di potenza

$$P(k) = Ak^{n-4}. \quad (5.8)$$

Tra questi il caso più significativo si ha ponendo  $n = 1$ , così facendo la funzione di correlazione diventa dimensionalmente indipendente da  $k$ , ha così origine lo spettro invariante di scala o di Harrison-Zeldovich.

La sua importanza non è solo di tipo matematica ma anche fisica: in uno spettro di questo tipo le fluttuazioni sono distribuite in egual misura tra grandi e piccole scale, entrando nell'orizzonte con la stessa potenza. Nel caso di nostro interesse, quella della radiazione cosmica di fondo, ciò permette la formazione a grandi scale delle strutture da cui sono in seguito nate le galassie, i cluster e i grandi oggetti stellari che osserviamo nell'Universo. Oltre a tutto questo, lo spettro di Harrison-Zeldovich evita che, a piccole scale, ci siano fluttuazioni estreme con la possibile conseguenza di formazione, ad esempio, di una quantità eccessiva di micro buchi neri.

Ad oggi, tutti i dati sperimentali sembrano coincidere nell'affermare che le fluttuazioni iniziali provengano da uno spettro invariante di scala alla Harrison-Zeldovich, anche le previsioni teoriche dell'inflazione portano ad un valore di  $n$  molto prossimo ad uno.

Tipicamente lo spettro di potenza è dovuto al prodotto di uno spettro di potenza iniziale, il quale potrebbe contenere in sé la traccia di un processo inflazionario, e una funzione detta *Funzione di Trasferimento*, la quale è il risultato del processo evolutivo del sistema

$$P(k) = P_i(k)T^2(t_i, t). \quad (5.9)$$



Considerando una sfera  $S(R, x_0)$  di raggio  $R$  e centro  $x_0$ , la massa in eccesso contenuta nella sfera rispetto alla media è dato da

$$\delta M(R) = \int_{S(R, x_0)} d^3x \delta(x) = \int_{S(R)} d^3x \delta(x - x_0)$$

dove è stato posto  $S(R, x_0) = S(R)$ . Si calcola la varianza dell'eccesso di massa mediando  $\delta M^2(R)$  sui possibili  $x_0$  nel volume  $V$

$$\overline{(\delta M(R))^2} = \frac{1}{V} \int d^3x_0 (\delta M(R))^2$$

applicando la trasformata di Fourier a  $\delta$  si può riscrivere il tutto come

$$\delta M^2(R) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} |\delta(k)|^2 |W_R(k)|^2 \quad (5.10)$$

dove si definisce la *Window Function*

$$W_R(k) = \int_{S(R)} d^3k \exp(ikx) = \frac{4\pi}{k^2} (\sin kR - R \cos kR)$$

è quindi possibile riscrivere l'equazione 5.10, assumendo di poter sostituire la media d'ensemble con la media spaziale

$$\delta M^2(R) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} P(K) |W_R(k)|^2. \quad (5.11)$$

Applicando, per lo spettro, la forma dell'equazione 5.8, si ha che la variazione di massa al quadrato è proporzionale a

$$\delta M^2(R) \propto \frac{1}{R^{n-7}}$$

mentre per le fluttuazioni di densità

$$\overline{\delta^2(R)} = \frac{\delta M^2(R)}{M^2(R)} \propto \frac{1}{R^{n-7}} \left( \frac{4}{3} \pi R^3 \right)^{-2} \propto \frac{1}{R^{n-1}}. \quad (5.12)$$

Il presente risultato chiarisce in modo del tutto esaustivo il significato fisico di spettro invariante di scala: “indipendentemente dalla scala che scegliamo per studiare le fluttuazioni la loro varianza sarà sempre la stessa!” Nel caso della radiazione cosmica di fondo si può misurare la varianza delle fluttuazioni di temperatura la quale è di circa  $(30\mu K)^2$ , ovvero attorno al valore medio di  $2.73^\circ K$ .

## 5.4 Fluttuazioni su una superficie sferica

La teoria sviluppata fin qui si può applicare alle fluttuazioni di un volume tridimensionale quale una sfera. Tuttavia, per poterla utilizzare nel caso della CMB bisogna apportare delle modifiche per adattarla alla geometria di nostro interesse.

Prima di tutto il campo di fluttuazioni non sarà più funzione della posizione  $\xi$  ma della direzione sulla sfera

$$\delta = \delta(\theta, \phi) = \delta(\hat{n})$$

il quale è sviluppato nella base delle funzioni ortogonali sulla sfera, cioè le armoniche sferiche

$$\delta(\hat{n}) = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} a_{lm} Y_m^l(\hat{n}) = \sum_{lm} a_{lm} Y_m^l(\hat{n}). \quad (5.13)$$

A questo punto la funzione di correlazione a due punti sarà scritta come

$$\langle \delta(\hat{n}_1) \delta(\hat{n}_2) \rangle = C(\hat{n}_1 - \hat{n}_2)$$

nell'ipotesi di isotropia si avrà solo la dipendenza da  $\theta_{12}$ , ovvero l'angolo sotteso tra  $\hat{n}_1$  ed  $\hat{n}_2$

$$\langle \delta(\hat{n}_1) \delta(\hat{n}_2) \rangle = C(\theta_{12}).$$

Quindi non essendoci dipendenza dalla coordinata  $\phi$  si potrà sviluppare nelle armoniche sferiche con  $m = 0$

$$C(\theta_{12}) = \sum_l C_l Y_0^l(\theta) = \sum_l C_l P_l(\cos\theta) \quad (5.14)$$

dove con  $Y_0^l(\theta) = P_l(\cos\theta)$  si indicano i polinomi di Legendre, soluzioni dell'equazione associata di Legendre (avendo imposto la condizione  $m = 0$ ).

Più in generale le armoniche sferiche sono un insieme ortogonale di soluzioni all'equazione differenziale di Laplace.

### 5.4.1 Lo spettro di potenza

In generale lo spettro di potenza,  $C_l$ , si esprimerà in termini delle fluttuazioni come

$$C_l = \langle |a_{lm}|^2 \rangle \quad (5.15)$$

il valore di  $C_l$ , a dato  $l$ , misura il grado di anisotropia ad una certa scala angolare.

Se ci si pone nel caso di isotropia si ottiene

$$C_l = \sum_m \frac{\langle |a_{lm}|^2 \rangle}{2l + 1} \quad (5.16)$$

mentre, uno spettro invariante di scala sarà dato dalla relazione

$$C_l \propto \frac{1}{l^2} \quad (5.17)$$

un calcolo dettagliato, di come uno spettro  $P(k)$  viene proiettato su una superficie sferica, porta ad un risultato diverso e più preciso

$$C_l \propto \frac{1}{l(l+1)}. \quad (5.18)$$

Sperimentalmente stabilire la gaussianità è un problema complesso. Anche i più semplici modelli di inflazione prevedono una distribuzione gaussiana per le fluttuazioni primordiali, ma quelle che osserviamo oggi non lo sono e l'analisi è resa ancor più difficile dal processo di evoluzione del nostro Universo. Comunque, fino a quando la fase evolutiva regge sulle fondamenta di una teoria lineare, come nel caso della radiazione cosmica di fondo, viene mantenuta la distribuzione iniziale e il problema può essere trascurato.

Nella figura che segue è mostrato lo spettro di potenza ottenuto dalla sovrapposizione dei dati più recenti di WMAP, un satellite spaziale che osserva tutto il cielo e concentra la sua misura a bassi  $l$  e i dati dell'South Pole Telescope (SPT) [23], un esperimento situato al Polo Sud che analizza con un'alta sensibilità una porzione specifica di cielo permettendo cioè di non essere limitato alle grandi scale angolari ma di osservare a multipoli alti [19].

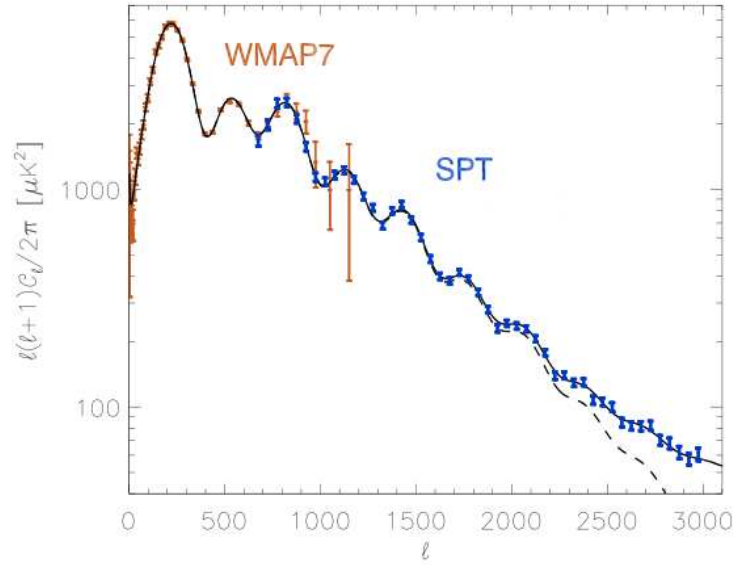


Figura 5.1: Spettro di potenza delle fluttuazioni della CMB ottenuto dai dati dei due esperimenti WMAP e SPT. La posizione del primo picco è quella che ci si aspetta se la geometria dell'Universo è supposta essere piatta, le bande di errore non includono le incertezze dovute alla calibrazione degli strumenti. [23]

In analogia con il caso tridimensionale  $C_l$  rappresenta una varianza intrinseca delle fluttuazioni alla scala angolare  $\theta \approx \pi/l$ , questo permetterà alle fluttuazioni  $a_{lm}$  di essere gaussiane se derivate dalla distribuzione

$$f(a_{lm}) = \frac{1}{\sqrt{2C_l}} \exp\left(-\frac{|a_{lm}|^2}{2C_l}\right).$$

Una proprietà fondamentale della distribuzione gaussiana è che i momenti di ordine pari possono essere descritti in termini della sola varianza, mentre quelli di ordine dispari sono tutti nulli, da cui il terzo momento

$$\langle x^3 \rangle = \int x^3 f(x) dx \propto \int x^3 \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx = 0.$$

Questa proprietà è valida anche nel caso delle fluttuazioni e si traduce nell'annullarsi della funzione di correlazione a tre punti o, come viene comunemente chiamato il *bispettro*

$$\langle \delta(\hat{n}_1) \delta(\hat{n}_2) \delta(\hat{n}_3) \rangle = 0 \quad (5.19)$$

fornendo in questo modo un criterio quantitativo per stabilire se un determinato campo di fluttuazioni è gaussiano oppure no.

Altre complicazioni, oltre quella sopra descritta, sorgono a livello sperimentale dalla contaminazione nella rilevazione di radiazioni diverse da quella della CMB, ad esempio quella di Sincrotrone prodotta da elettroni accelerati dal campo magnetico della nostra galassia, la Via Lattea. Un altro contributo che compete al contagio dei dati è dovuto ai fotoni diffusi dalla polvere intergalattica. Fortunatamente questo tipo di radiazione è non gaussiana, quindi prima di andare ad esaminare la gaussianità della CMB i due contributi possono essere sottratti, anche se il compito non sempre si rivela facile.

I dati sperimentali, prima di COBE e in seguito di WMAP, non sembrano contraddire la gaussianità teorizzata a favore della radiazione cosmica di fondo anche se con consistenti errori sperimentali.

Del resto, i modelli più accreditati che descrivono il processo inflazionario, predicono livelli di non gaussianità decisamente modesti e quindi difficilmente rilevabili. Oltre al problema della gaussianità c'è quello dovuto alla polarizzazione della CMB.

Lo studio dello spettro di potenza della polarizzazione è la nuova frontiera nel campo sperimentale per quel che riguarda i processi correlati alla radiazione cosmica di fondo.

Esistono due tipi di polarizzazione denominati E-mode  $E(\hat{n})$  e B-mode  $B(\hat{n})$  [20]. Gli E-mode provengono dallo scattering Thomson e sono prodotti dalla fisica del plasma primordiale, i B-mode, i quali non sono stati misurati direttamente, si ipotizza abbiano origine durante l'era inflazionaria e che siano determinati dalle variazioni di densità delle onde gravitazionali primordiali.



## Capitolo 6

### Segnale Integrated Sachs-Wolfe

L'effetto Sachs-Wolfe ordinario è responsabile delle anisotropie della radiazione cosmica di fondo causate dalla presenza di un potenziale gravitazionale che risulta costante durante l'epoca della materia. Un ulteriore effetto è giocato dalla variazione del potenziale che prende il nome di *Integrated Sachs-Wolfe* (ISW). Un fotone che attraversa una buca di potenziale può subire differenti redshift/blushift dovuti alla variazione del potenziale gravitazionale e dare così luogo a contributi diversi quando la particella esce dalla buca rispetto a quando vi era entrata.

Scrivendo la soluzione generale nel regime di time coupling per il monopolo si ha il termine  $\approx \int d\eta(\dot{\Phi} - \dot{\Psi})$ , ovvero una combinazione di potenziali. Assumendo che questi non variano, le derivate sono nulle, ma nei precedenti capitoli è stato messo in rilievo più volte che i potenziali cambiano quando l'Universo muta le equazioni di stato.

La variazione dei potenziali sulla superficie di ultimo scattering è un effetto relativamente vicino, poichè l'Universo ha modificato le equazioni di stato in epoche cosmologiche recenti ciò permette di osservare questo effetto su scale angolari grandi.

La somma di questi contributi è data da

$$\begin{aligned}\Theta_l(k, \eta) &\cong [\Theta_0(k, \eta_*) + \Psi(k, \eta_*)] j_l [k(\eta_0 - \eta_*)] \\ &+ \left\{ \int j_{l-1} [k(\eta_0 - \eta_*)] - \frac{l+1}{[k(\eta_0 - \eta_*)]} j_l [k(\eta_0 - \eta_*)] \right\} 3\Theta_1(k, \eta_*) \\ &+ \int_0^{\eta_0} d\eta e^{-\tau} [\dot{\Psi}(k, \eta) - \dot{\Phi}(k, \eta)] j_l [k(\eta_0 - \eta)]\end{aligned}$$

Ci sono tre considerazioni da fare:

- il free streaming del monopolo, il quale è dovuto alla  $j_l(h\eta_0)$  e che “picca” per scale  $l \leq k\eta_0$
- il contributo del dipolo (sfasato di  $\pi/2$  dal monopolo) ha l’effetto di aumentare la potenza soprattutto alle scale dove si ha il monopolo debole (le valli)
- l’effetto Sachs-Wolfe dovuto alla variazione del potenziale, non completamente decaduto dopo l’equivalenza è un termine coerente con il monopolo.

Poichè nell’epoca dominata dalla materia i potenziali sono costanti, sia per perturbazioni adiabatiche che di isocurvatura, il contributo di ISW può essere separato in due parti:

- Early Integrated Sachs-Wolfe durante l’epoca della radiazione
- Late Integrated Sachs-Wolfe durante l’epoca di dark energy

Le scale che entrano nell’orizzonte sonoro nell’epoca dominata dalla radiazione, ricevono un impulso dalla diminuzione del potenziale determinato dalla variazione dell’equazione di stato del fluido cosmico. Queste scale non saranno soggette all’effetto late ISW, dato che il potenziale è già decaduto quando il contributo della dark energy diventa significativo. Le grandi scale, al contrario, non subiscono l’early ISW, ma ricevono un contributo dal late ISW.

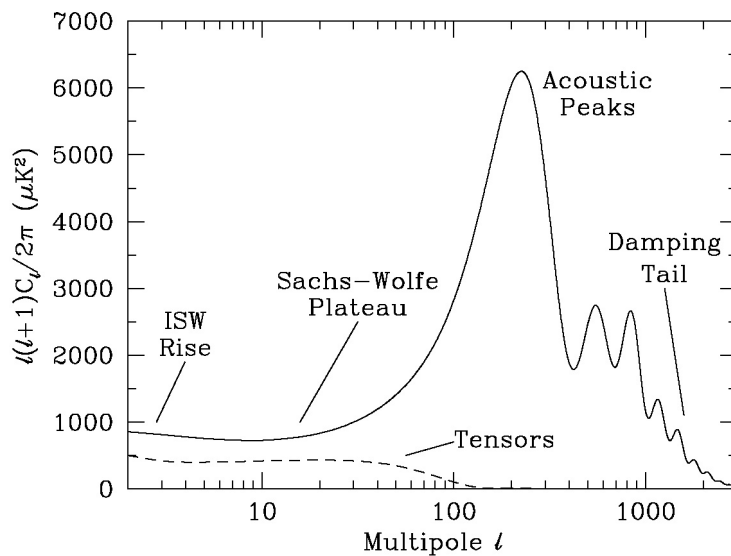


Figura 6.1: Sono mostrati i picchi di anisotropia con l’andamento del segnal Sachs-Wolfe ed Integrated Sachs-Wolfe.



Poichè il contributo di  $\Lambda$  diviene significativo a  $z$  recenti, il monopolo  $l = 0$  interviene nell'effetto di proiezione. Confrontando lo spettro piatto dell'effetto SW si mette in evidenza come l'ISW si riduce al crescere di  $l$  a causa proprio dell'effetto di cancellazione.

## 6.1 Le Spherical Needlets

L'analisi statistica dei dati è fatta utilizzando un nuovo tipo di Spherical Wavelets: le Needlets. Nel passato e ancora oggi, le Wavelets si sono rivelate uno strumento fondamentale per l'analisi della radiazione cosmica di fondo, essendo queste una covoluzione di armoniche sferiche possiedono la proprietà di risultare fortemente localizzate attorno ad una data direzione angolare. Le Needlets aggiungono a questa proprietà una precisa localizzazione anche nello spazio armonico, descrivendo puntualmente il segnale proveniente da un numero finito di multipoli:

$$\psi_{jk}(x) = \sum_{l=s^{j-1}}^{s^{j+1}} \Psi\left(\frac{l}{s^j}\right) P_l(\cos \vartheta) \quad (6.1)$$

$$= \sum_{l=s^{j-1}}^{s^{j+1}} \Psi\left(\frac{l}{s^j}\right) \sum_{m=-l}^l \bar{Y}_{lm}(x) Y_{lm}(\xi_{jk}) \quad (6.2)$$

dove  $\xi_{jk}$  denota una pixelizzazione su una sfera unitaria  $S^2$  limitando il numero più alto di multipolo estratto da una mappa, mentre  $\vartheta$  indica l'angolo tra i vettori  $x, \xi_{jk}$  [8].

I coefficienti di Needlets sono ottenuti da:

$$\begin{aligned} \beta_{jk} &= \int_{S^2} T(x) \psi_{jk}(x) dx = \int_{S^2} \left\{ \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} Y_{lm}(x) \right\} \psi_{jk}(x) dx \\ &= \int_{S^2} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} Y_{lm}(x) \left\{ \sum_{l'=s^{j-1}}^{s^{j+1}} \Psi\left(\frac{l'}{s^j}\right) \sum_{m'=-l'}^{l'} \bar{Y}_{l'm'}(x) Y_{l'm'}(\xi_{jk}) \right\} dx \\ &= \sum_{l'=s^{j-1}}^{s^{j+1}} \Psi\left(\frac{l'}{s^j}\right) \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} \sum_{m'=-l'}^{l'} Y_{l'm'}(\xi_{jk}) \left\{ \int_{S^2} Y_{lm}(x) \bar{Y}_{l'm'}(x) dx \right\} \\ &= \sum_{l=s^{j-1}}^{s^{j+1}} \Psi\left(\frac{l}{s^j}\right) \sum_{m=-l}^l a_{lm} Y_{lm}(\xi_{jk}) \end{aligned} \quad (6.3)$$

Alcune proprietà delle Needlets [6]:

- essendo definite nello spazio armonico hanno alte prestazioni computazionali e sono inoltre facilmente adattabili a pacchetti standard come HEALPix [8]
- possono essere considerate funzioni quasi esponenziali (cioè più veloci di qualsiasi altro polinomio), inoltre sono definite anche nello spazio dei pixels
- sono esattamente localizzate su un numero finito di multipoli
- un'ultima proprietà associata ai coefficienti delle Needlets è dovuta alla frequenza, che nel caso sia alta, fa sì che i medesimi siano approssimabili a semplici coefficienti indipendenti (sotto gaussianità) e identicamente distribuiti [5].

## 6.2 Le mappe utilizzate per l'analisi dati

Come si vede chiaramente nella figura 6.1, l'effetto ISW presenta il suo contributo nella regione dei bassi multipoli dello spettro di CMB, questa regione è la più colpita dalla varianza cosmica rendendo così l'estrazione del segnale ISW molto difficile. Per i traccianti di materia, Large Scale Structure (LSS) nell'Universo locale, è stato utilizzata la NRAO VLA Sky Survey (NVSS), un dataset di  $1.8 \times 10^5$  oggetti, osservati a 1.4 GHz, con  $\delta > -37^\circ$  (valore di declinazione).

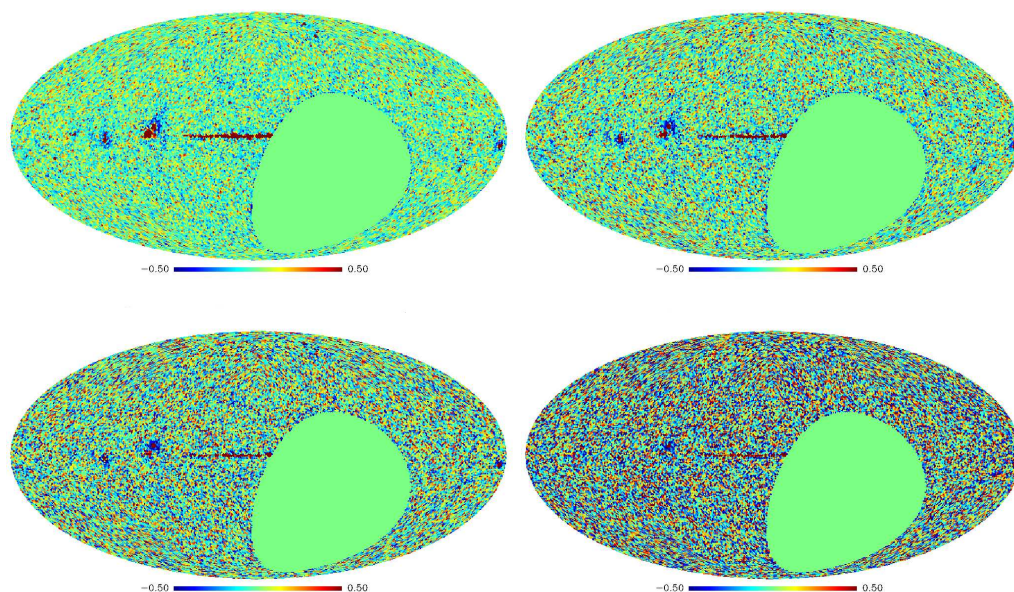


Figura 6.2: Mappe di galassie provenienti dall' NRAO VLA Sky Survey (NVSS) ottenute scegliendo quattro thresholds diverse (2.5, 5, 10, 20) per la detezione delle sorgenti.

La Survey copre, con il suo raggio d'azione, circa 80% del cielo, presentando però una grande area di assenza dati nell'emisfero australe dove risiede il centro di osservazione. Le mappe di galassie sono ricavate scegliendo quattro thresholds diverse (2.5, 5, 10, 20) per la detezione di sorgenti nelle mappe a tutto cielo. La combinazione lineare dei vari canali (K,Ka,Q,V,W) di WMAP genera la mappa di temperatura Internal Linear Combination (ILC) [24] rilasciata da WMAP 7 anni, la quale essendo data a  $N_{\text{side}} = 512$  va degradata a  $N_{\text{side}} = 64$  per poter essere confrontate con le mappe di NVSS.

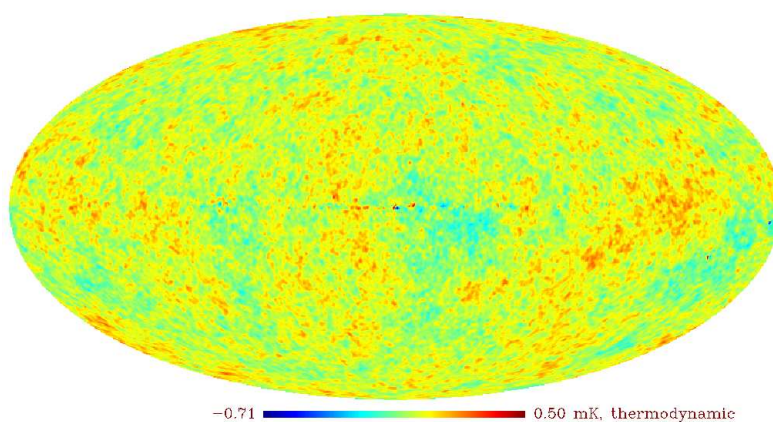


Figura 6.3: Mappa di temperatura ILC ottenuta dalla combinazione lineare dei vari canali di WMAP 7 anni.

La mappa di galassie acquisita dalla NRAO VLA Sky Survey (NVSS) [15]

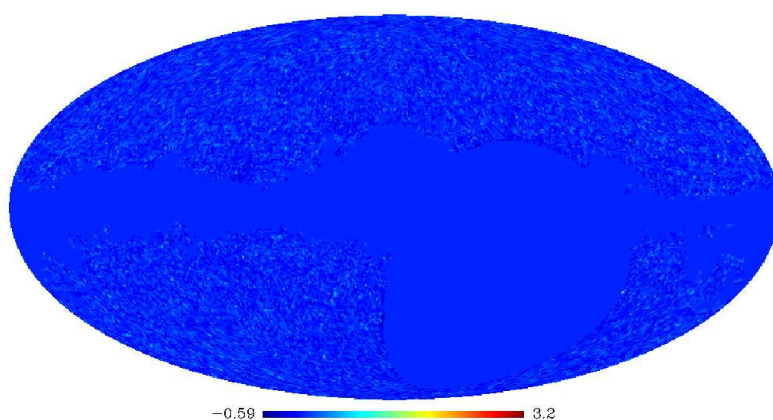


Figura 6.4: Mappa di galassie ottenuta dall'NVSS.

Per ottimizzare l'analisi dati è necessario utilizzare la combinazione delle maschere, quella di temperatura

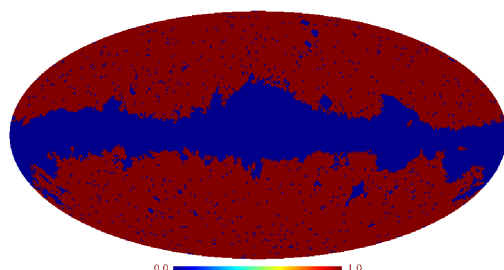


Figura 6.5: Mappa della maschera di temperatura.

e la maschera NVSS, risalta l'area (in blu) in cui si ha un'assenza di dati a disposizione

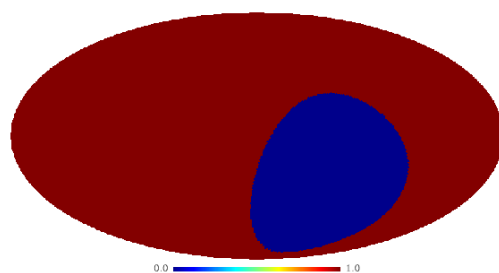


Figura 6.6: Mappa della maschera NVSS.

La mappa ottenuta dalla combinazione della maschera di temperatura e della maschera NVSS è stata utilizzata in tutta l'analisi dati per la rilevazione del segnale ISW

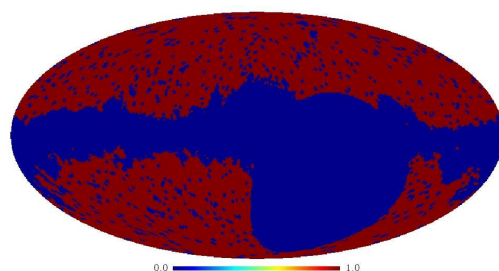


Figura 6.7: Mappa di combinazione della maschera di temperatura e della maschera NVSS.

## 6.3 Cross-correlazione tra CMB e LSS

Definendo la funzione di auto-correlation a 2 punti per la radiazione cosmica di fondo

$$C^{TT}(\alpha) \equiv \langle \delta T_1 \delta T_2 \rangle = \sum_l \frac{(2l+1)}{4\pi} \omega_{T,l}^2 C_l^{TT} P_l(\cos \alpha) \quad (6.4)$$

e la funzione di auto-correlation a 2 punti per le mappe di NVSS

$$C^{NN}(\alpha) \equiv \langle \delta n_1 \delta n_2 \rangle = \sum_l \frac{(2l+1)}{4\pi} \omega_{N,l}^2 C_l^{NN} P_l(\cos \alpha) \quad (6.5)$$

dove  $P_l$  indica i polinomi di Legendre,  $\alpha$  la separazione angolare tra 2 punti,  $\omega$  la funzione che modella la risposta del beam sperimentale e  $\delta n$  il numero di conteggi in funzione della direzione.

Si ottiene la funzione di *Cross-correlazione* tra la mappa della radiazione cosmica di fondo e la mappa delle large scale structure

$$C^{TN}(\alpha) \equiv \langle \delta T_1 \delta N_2 \rangle = \sum_l \frac{(2l+1)}{4\pi} \omega_{T,l} \omega_{N,l} C_l^{TN} P_l(\cos \alpha) \quad (6.6)$$

definendo  $C^{TN} = \langle a_{lm}^T a_{lm}^{*N} \rangle$ .

A questo punto è possibile estrarre i coefficienti di Needlets  $\beta_{jk}$  dalle mappe di CMB e da quelle di NVSS, questi non sono altro che l'analogo dei coefficienti in armoniche sferiche  $a_{lm}$  data l'espansione su una base Needlet

$$\beta_j^{TN} \equiv \sum_k \frac{1}{N_{pix}(j)} \beta_{jk}^T \bar{\beta}_{jk}^N \quad (6.7)$$

i  $\beta_{jTh}^{TN}$  teorici possono essere calcolati a partire dai  $C_l^{TN}$

$$\beta_{jTh}^{TN} = \sum \frac{(2l+1)}{4\pi} \left[ \psi \left( \frac{l}{s^j} \right) \right]^2 \omega_{T,l} \omega_{N,l} C_l^{TN} \quad (6.8)$$

mentre la varianza definisce le corrispettive barre di errore teoriche

$$\Delta \beta_{jTh}^{TN} = \left( \sum \frac{(2l+1)}{(16\pi^2)} \left[ \psi \left( \frac{l}{s^j} \right) \right]^4 ((C_l^{TN})^2 + C_l^T C_l^N) \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6.9)$$

### 6.3.1 Simulazioni di CMB e di LSS

Per la verifica del codice di detezione, sono state create due mappe [3]: una di simulazione per la radiazione cosmica di fondo, la quale al suo interno contiene un segnale artificiale di ISW ed una mappa di LSS (con la caratteristica area di assenza di dati).

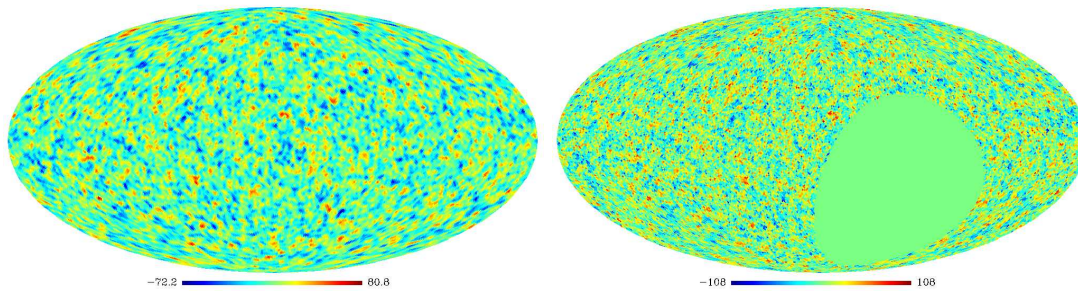


Figura 6.8: Mappe simulate di CMB (dove è stato inserito artificialmente il segnale ISW) e di LSS.

La figura che segue mostra la cross-correlazione delle due mappe di simulazione: è evidente la presenza del segnale aggiunto artificialmente alla mappa di CMB (linea tratteggiata rossa), che ricalca l'andamento della curva teorica (linea continua nera) in gran parte entro le barre di errore.

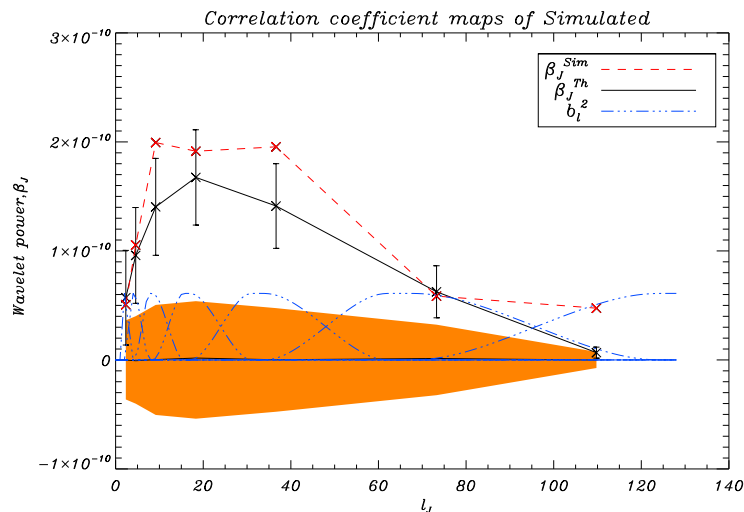


Figura 6.9: Cross-correlazione del segnale simulato di ISW.

La linea nera orizzontale rappresenta le simulazioni Monte Carlo di cross-correlazione (in arancione le corrispettive barre d'errore) fatte utilizzando 10.000 mappe simulate, si noti come il segnale artificiale sia al di sopra di questa, la stessa cosa ci si aspetta nelle mappe reali qualora fosse individuato la presenza dell'effetto Integrated Sachs-Wolfe. La

potenza del segnale è individuata grazie alla proprietà di localizzazione dei coefficienti  $b_l^2$  delle Spherical Needlets [6].

Le mappe simulate hanno confermato il perfetto funzionamento del codice numerico così da avallare ogni dubbio durante l'analisi delle mappe di WMAP 7 anni e di quelle della NRAO VLA Sky Survey per la detezione del segnale di ISW.

### 6.3.2 Autospettri di galassie

La potenza del segnale, per le mappe di galassie, dipende dalla scelta della threshold. La potenza più alta si ottiene scegliendo, nel nostro caso, una threshold uguale a 20 (linea tratteggiata rossa) ma questo non necessariamente influisce positivamente nella detezione del segnale di ISW.

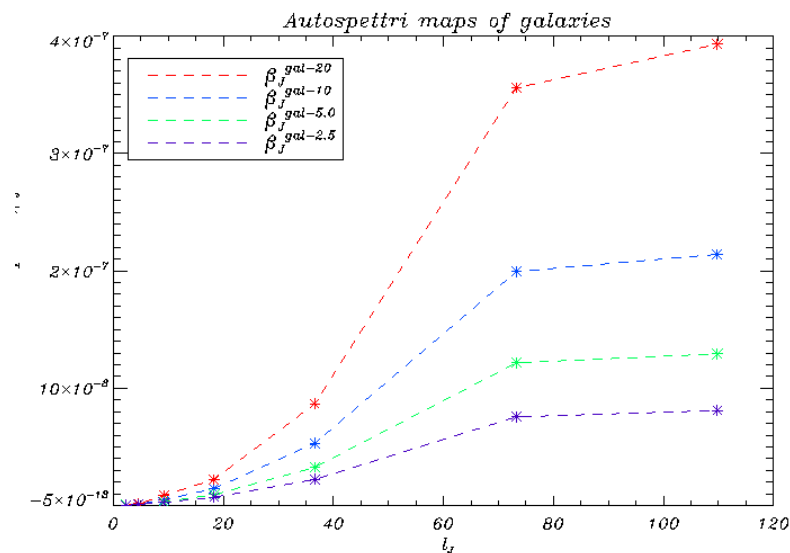


Figura 6.10: La potenza del segnale, per le mappe di galassie, dipende dalla scelta della threshold. La potenza più alta si ottiene scegliendo, ad esempio una threshold uguale a 20 (linea tratteggiata rossa), la threshold più bassa di 2.0 (linea tratteggiata viola) rappresenta la potenza del segnale inferiore.

Il problema della threshold è ancora aperto e riguarda molti campi dell'astrofisica. Nella figura che segue è rappresentato un campo stellare, i boxes dei tre colori rosso, blu e verde, identificano una diversa probabilità di contare sorgenti qualora si scelgano tre diversi valori per la threshold. Nel caso di una scelta di soglia troppo alta, la conseguenza sarà quella di perdere sorgenti nel conteggio finale, mentre qualora avvenga la scelta di una soglia troppo bassa si potrà commettere lo sbaglio di includere anche oggetti appartenenti alla materia diffusa quindi non stellari.

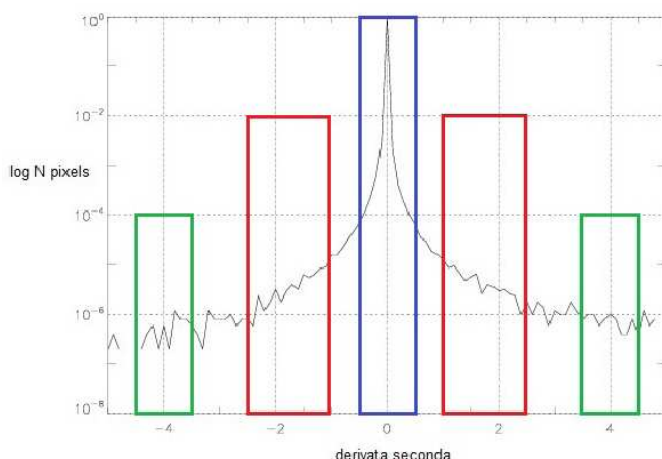


Figura 6.11: Campo stellare con tre boxes colorati che identificano diverse probabilità di trovare sorgenti a seconda del valore della threshold che si sceglie.

### 6.3.3 Detezione del segnale ISW

Garantito il corretto funzionamento del codice mediante le mappe simulate, si verifica l'esistenza del segnale di Integrated Sachs-Wolfe nelle mappe di WMAP. L'analisi di cross correlazione [17] è stata fatta utilizzando, oltre le mappe della NVSS per le galassie, la mappa ILC per la radiazione cosmica di fondo vista nel paragrafo 6.3.

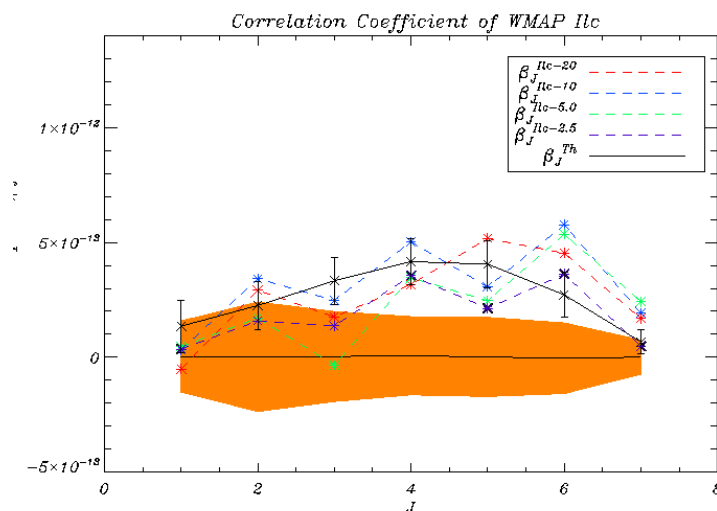


Figura 6.12: Cross-correlazione tra la mappa ILC e la NVSS sono mostrati i coefficienti  $\beta_j$  ottenuti per le diverse mappe di galassie utilizzate.

Si trova evidenza di un segnale al di sopra delle simulazioni Monte Carlo che si ipotizza essere il segnale ricercato di Integrated Sachs-Wolfe. Le curve colorate, che rappresentano il segnale di ISW ottenuto dalla cross-correlazione [1] tra la mappe ILC e quelle



della NVSS è in buon accordo con la curva teorica ma mostra un diverso comportamento dipendente dalla threshold scelta durante la creazione della mappa di galassia.

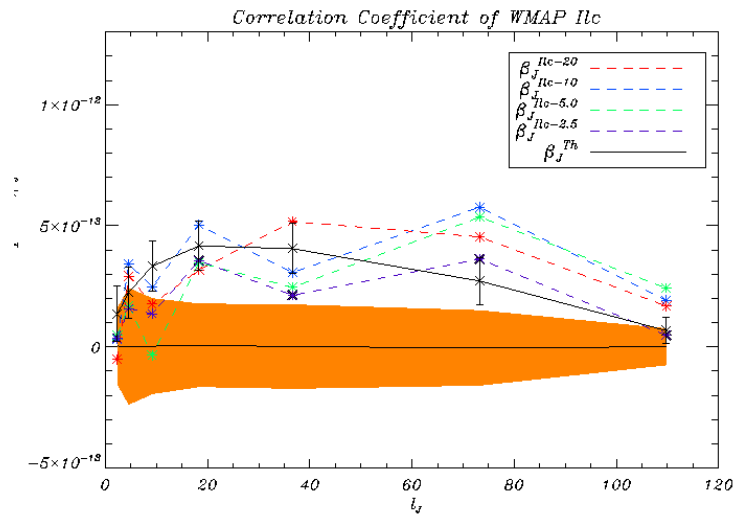


Figura 6.13: Power spectrum di Cross-correlazione tra la mappa ILC e la NVSS ottenuta dalla scelta di diversi valori per la threshold di detezione.

Un risultato simile si ha effettuando lo stesso studio ma utilizzando solo una mappa ILC (si è scelta quella con threshold uguale a 10) confrontata con l'analisi di una mappa da me creata ottenuta dalla combinazione dei canali Q,V,W di WMAP 7 anni.

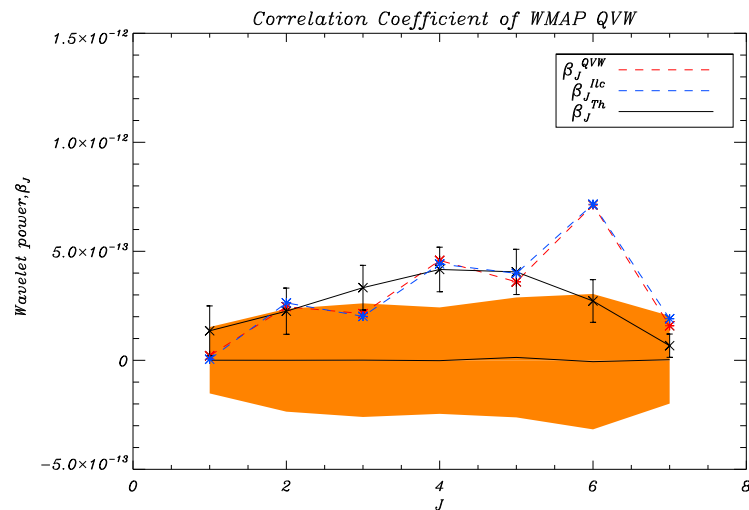


Figura 6.14: Cross-correlazione tra la mappa combinata dei canali Q,V,W e la ILC sono mostrati i coefficienti  $\beta_j$ .

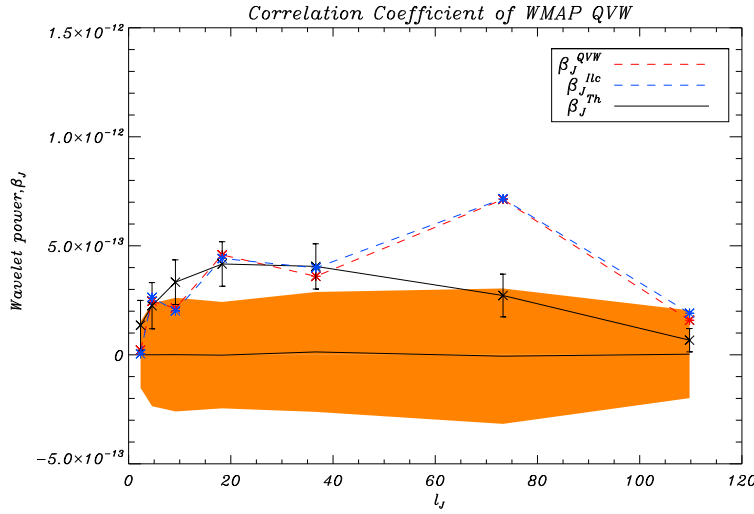


Figura 6.15: Power spectrum di Cross-correlazione tra la mappa combinata dei canali Q,V,W e la ILC ottenuta ponendo la threshold uguale a 10.

## 6.4 Chi-square test

Il Chi-square test permette di quantificare la somiglianza tra i risultati ottenuti rispetto ad un modello [11].

L'analisi statistica, fatta nel caso di ipotesi nulla, utilizza una distribuzione Monte Carlo di 10.000 mappe simulate della radiazione cosmica di fondo.

Sono state scelte due diverse strade per l'analisi: la linea continua è il chi-square test utilizzando la covarianza mentre la linea tratteggiata tiene conto della varianza (vedi figura 6.16 e 6.17)

Di seguito l'espressione utilizzata per derivare il valore del  $\chi^2$ , avendo ricavato i coefficienti  $\beta_j^{obs}$  dall'analisi del precedente paragrafo e avendo calcolato i coefficienti teorici utilizzando la formula 6.8

$$\chi^2 \equiv \sum_j \frac{(\beta_j^{obs} - \langle \beta_j^{sim} \rangle)^2}{\Delta \beta_j^2} \quad (6.10)$$

Nel caso del Chi-square test effettuato sulla mappa ILC si sono considerate tutte le mappe di galassie per le diverse scelte di thresholds utilizzate nell'analisi dati.

Un secondo test pone a confronto la mappa ILC e quella ottenuta dalla combinazione dei canali Q,V,W dove per questa analisi, come si è visto, è stata scelta la mappa di galassie con threshold uguale a 10. Nell'analisi del test dal grafico 6.16 è evidente il comportamento anomalo qualora si scelga una soglia troppo alta (nel nostro caso 20). Mentre osservando il grafico 6.17 la mappa di combinazione dei canali Q,V,W risponde

in modo non del tutto previsto al confronto con la ILC, nonostante il power spectrum mostrava un comportamento praticamente identico.

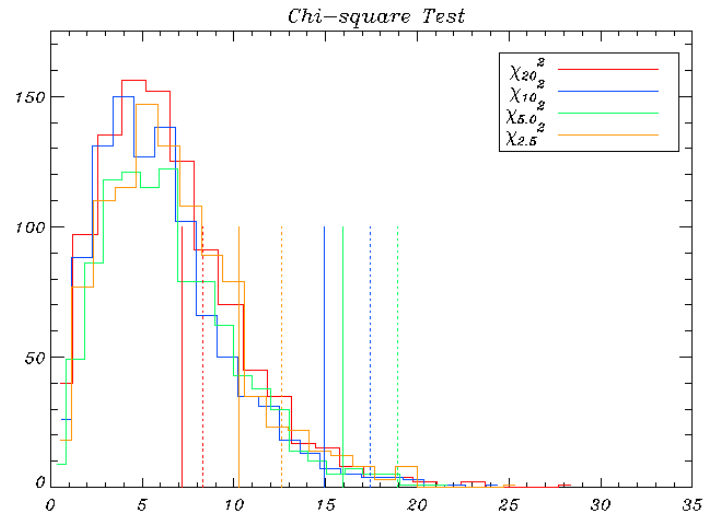


Figura 6.16: Chi-square test per la mappa ILC e le varie mappe di galassie NVSS con diversi valori di threshold

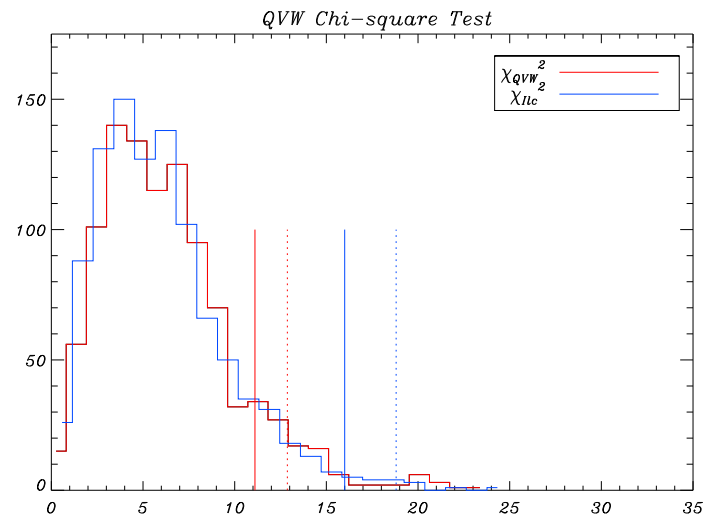


Figura 6.17: Confronto del Chi-square test per la mappa ILC e la mappa Q,V,W con la threshold uguale a 10



# Capitolo 7

## Conclusioni

Questo lavoro di Cosmologia ha l'obiettivo, dall'analisi delle mappe di WMAP 7 anni [24] e di quelle provenienti dalla NRAO VLA Sky Survey (NVSS) [15], di estrapolare il segnale di *Integrated Sachs-Wolfe* (ISW) utilizzando il metodo statistico di cross-correlazione [10] basato su una nuova costruzione delle Spherical Wavelets: le Needlets. Molti esperimenti tra cui le misure della distanza di luminosità delle supernovae di tipo Ia, della radiazione cosmica di fondo ed un corposo numero di altre osservazioni cosmologiche, concordano in un modello che prevede un Universo piatto, in cui la materia barionica rappresenta appena il 5% della densità totale.

Il rimanente 95%, si ipotizza sia costituito per un terzo dalla cold dark matter e per due terzi da un fluido cosmico che determina l'accelerazione dell'Universo: la *Dark Energy*. I risultati da me ottenuti, hanno confermato quanto mostrato già in una prima analisi da D.Pietrobon, A.Balbi, D.Marinucci (2006) [7] con i dati di WMAP 3 anni, avendo però avuto a disposizione dei miglioramenti sostanziali nel codice Needlets. Nell'elaborazione del codice computazionale ho apportato personalmente delle migliorie per lo sviluppo dell'analisi dati, questo ha contribuito ad approfondire le conoscenze nello studio dell'effetto *Integrated Sachs-Wolfe*.

I principali risultati trovati sono:

- grazie ad uno studio minuzioso è stato trovato, con buona confidenza statistica, quello che si ritiene essere il segnale dell'effetto ISW
- il chi-square test è calcolato in due modi: o considerando la covarianza, ovvero la correlazione dei dati o tenendo conto della varianza e quindi solo degli elementi sulla diagonale. Il tutto conduce alla realizzazione di grafici nei quali sono sovrapposti i risultati del test che risultano legati alla scelta del valore che la threshold può assumere nella creazione di una mappa di galassie

- le mappe simulate (in quella di CMB è stato introdotto artificialmente un segnale di ISW) avvalorano l'attendibilità del codice utilizzato
- la potenza del segnale per le mappe di galassie è fortemente dipendente dalla scelta della threshold

Dunque è stato introdotto un nuovo elemento nello studio dell'effetto ISW e della sua statistica: la dipendenza, che il segnale presenta, nella scelta della threshold di detezione per le sorgenti delle mappe a tutto cielo.

I test ottenuti con le mappe di simulazione avvalorano i risultati trovati, oltre alla tangibile esistenza del segnale di ISW.

Certamente allettanti risultati e ottimizzazioni nel codice di analisi, potranno essere fatte utilizzando nuovi dati, soprattutto quelli provenienti dalla sonda Planck.

Ulteriori studi con conseguenti verifiche dell'effetto *Integrated Sachs-Wolfe* permetterà, in futuro, di mettere dei "constraints" sempre più stringenti sulla  $\Lambda$ .

# Bibliografia

- [1] A.Challinor, A.Lewis, *The linear power spectrum of observed source number counts*, arXiv:astro-ph/11055292 v1 (2011)
  
- [2] Balloon Observations Of Millimetric Extragalactic Radiation and Geophysics (BOOMERanG), <http://cmb.phys.cwru.edu/boomerang/>
  
- [3] CAMB, <http://lambda.gsfc.nasa.gov/toolbox/tb-camb-form.cfm>
  
- [4] Cosmic Background Explorer (COBE), <http://lambda.gsfc.nasa.gov/product/cobe/>
  
- [5] D.Marinucci, D.Pietrobon, A.Balbi & Al., *Spherical Needlets for CMB Data Analysis*, arXiv:astro-ph/07070844 v1 (2007)
  
- [6] D. Marinucci, D. Pietrobon, A. Balbi, & Al., *MNRAS*, 383, 539, arXiv:0707.0844 (2008)
  
- [7] D.Pietrobon, A.Balbi, D.Marinucci, *Integrated Sachs-Wolfe effect from the cross correlation of WMAP3 year and the NRAO VLA sky survey data: New results and constraints on dark energy*, arXiv:astro-ph/0606475 v2 (2008)
  
- [8] D.Pietrobon, A.Balbi, P.Cabella & Al., *Needatool: A needlet analysis tool for cosmological data processing*, arXiv:astro-ph/10101371 v1 (2010)
  
- [9] Hierarchical Equal Area isoLatitude Pixelization (HEALPix), <http://healpix.jpl.nasa.gov/>

- [10] J.D.McEwen, Y.Wiaux, M.P.Hobson & Al., *Probing dark energy with steerable wavelets through correlation of WMAP and NVSS local morphological measures*, arXiv:astro-ph/07040626 v2 (2008)
- [11] J.R.Taylor, *Introduzione all'analisi degli errori*, (2000)
- [12] Lambda-Cold Dark Matter (LambdaCDM),  
<http://lambda.gsfc.nasa.gov/product/map/current/>
- [13] M.Carroll Sean, *The Cosmological Constant*, arXiv:astro-ph/0004075 v2 (1999)
- [14] M.Frommert, R.Durrer, J.Michaud, *The Kolmogorov-Smirnov test for the CMB*, arXiv:astro-ph/11085354 v2 (2011)
- [15] NRAO VLA Sky Survey (NVSS), <http://www.cv.nrao.edu/nvss/>
- [16] Planck Surveyor (Planck), <http://www.rssd.esa.int/planck/>
- [17] P.Vielva, E.Martinez-González, M.Tucci, *Cross-correlation of the CMB and radio galaxies in real, harmonic and wavelet spaces: detection of the integrated Sachs-Wolfe effect and dark energy constraints*, arXiv:astro-ph/0408252 v2 (2005)
- [18] Ray d'Inverno, *Introduzione alla Relatività di Einstein* (2001)
- [19] R.Keisler, C.L.Reichardt, K.A.Aird & Al., *A measurement of the damping tail of the cosmic microwave background power spectrum with the South Pole Telescope*, arXiv:astro-ph/1105.3182 v2 (2011)
- [20] Scott Dodelson, *Modern Cosmology*, (2003)
- [21] S.M.Carroll, *The Cosmological Constant*, arXiv:astro-ph/08010642 v2 (2010)
- [22] S.Perlmutter, G.Aldering, S.Deustua & Al., *Cosmology from Type Ia Supernovae*, arXiv:astro-ph/9812473 v1 (1998)



[23] South Pole Telescope (SPT), <http://pole.uchicago.edu/>

[24] Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP),  
<http://map.gsfc.nasa.gov/>

[25] W.Chakraborty, *Accelerating Expansion of the Universe*, arXiv:astro-ph/11051087  
(2010)



# Publicazioni Scientifiche

- “*Ion rates in the International Space Station during the December 2006 Solar Particle Event*”  
M.Larosa, F.Agostini, M.Casolino, C.De Santis, L.Di Fino, C.La Tessa, L.Narici, P.Picozza, A.Rinaldi and V.Zaconte (2011)

Journal of Physics G: Nuclear and Particle  
[www.iopscience.iop.org/0954-3899/38/9/095102/](http://www.iopscience.iop.org/0954-3899/38/9/095102/)

- “*The ALTEA experiment onboard the International Space Station*”  
L.Di Fino, F.Agostini, M.Larosa, L.Narici and V.Zaconte (2012)

Journal of Physics G: Nuclear and Particle  
[www.iopscience.iop.org](http://www.iopscience.iop.org)

# Publicazioni future

- “*Integrated Sachs-Wolfe effect as Cosmological Probe*”  
F.Agostini, et.al in preparazione

# Conferenze

I am a member of the scientific and organising committee of the Young Researchers Meeting Rome a project which promotes discussion and idea interchange between PhD students, postdocs and young researchers who approach the scientific research in Physics. The third meeting was held in Roma, at the University of Roma “Tor Vergata” on January 20th 2012. The proceedings of the conference are available on [www.yrnr.it](http://www.yrnr.it)

*“ Non possiamo sapere quante di queste conoscenze dovranno, negli anni a venire, essere aggiornate o viste sotto una nuova prospettiva in seguito a nuove scoperte. Ma non possiamo non commuoverci di fronte ai tentativi di capirci qualcosa compiuti da questa specie sperduta su un piccolo pianeta, in orbita intorno a una comunissima stella di una comunissima galassia”*

*La musica del Big Bang*